مکانیک کوانتومی
مفاهیم، مبانی و کاربردها

علیرضا علمائی
استادیار فیزیک دانشگاه جهرم

فهرست مطالب

۳	**اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی**	**۵**
۱.۳	آزمایش دوشکافی یانگ	۵
۱.۱.۳	آزمایش با گلوله	۶
۲.۱.۳	آزمایش با امواج	۷
۳.۱.۳	آزمایش با الکترون	۸
۴.۱.۳	آزمایش دوشکافی تاخیری	۱۴
۲.۳	آزمایش ماخ-زندر	۱۴
۱.۲.۳	آزمایش ماخ-زندر کلاسیکی	۱۴
۲.۲.۳	آزمایش ماخ-زندر کوانتومی	۱۶
۳.۳	حالتها به عنوان بردار	۱۸
۱.۳.۳	کتهای پایه	۲۱
۴.۳	عملگر	۲۲
۱.۴.۳	همیوغ هرمیتی	۲۳
۲.۴.۳	عملگر تصویر	۲۳
۳.۴.۳	شرط تمامیت	۲۴
۴.۴.۳	عملگر یکانی	۲۴
۵.۳	ویژه مقادیر و ویژه کتها	۲۶
۱.۵.۳	مقدار انتظاری	۲۹
۶.۳	تحول زمانی	۳۰
۱.۶.۳	حالت های مانا	۳۲
۲.۶.۳	تحول زمانی مقدار انتظاری	۳۳
۳.۶.۳	تحول زمانی عملگر	۳۴
۴.۶.۳	معادله ی هایزنبرگ	۳۴
۵.۶.۳	قضیه اهرنفست	۳۵
۷.۳	اصول موضوعه مکانیک کوانتومی	۳۵
۸.۳	جابجایی عملگرها	۳۵
۹.۳	تبهگنی	۳۹
۱۰.۳	روابط عدم قطعیت	۴۱
۱۱.۳	عملگر زمان	۴۱
۴	**مکانیک ماتریسی**	**۴۳**
۱.۴	نمایش ماتریسی	۴۳
۲.۴	تبدیل پایه	۴۶
۱.۲.۴	تبدیلهای کت، برا و عملگر	۵۰
۳.۴	حل معادلات ویژه مقداری	۵۲

فصل ۳

اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی

فیزیک کوانتومی، توصیف برهمکنش نور با ماده در مقیاس اتمی و زیر اتمی است. در مقیاس اتمی، رفتار سامانه ها شبیه آن چیزی که در روزمره میبینیم و با آن تجربه مستقیم داریم نیست. نه مانند ذره، نه مانند نور، مانند هیچکدام از پدیده هایی که تاکنون دیده ایم نیست. در فصل قبل به آزمایشها و پدیده هایی پرداختیم که توضیح آنها با فیزیک کلاسیک ممکن نبود و بنابراین مردم برای توضیح آنها به مفاهیم جدیدی مانند کوانتیده بودن انرژی، خاصیت ذره ای تابش یا خاصیت موجی ماده دست یازیدند. بعلاوه مفهوم تابع موج و احتمال در بررسی پدیده ها معرفی شد. اما نهایتا با چندین پدیده ی مجزا روبرو بودیم و یک نظریه ی واحد که بتواند به کمک چند اصل موضوع همه ی آنها را توضیح دهد معرفی نشده بود.

افزایش تدریجی اطلاعات درباره ی رفتار در مقیاس اتمی و کوچکتر از آن، در ۲۵ سال اول قرن بیستم، که نشانه هایی را مبنی بر اینکه اجسام کوچک چگومه رفتار میکنند به دست میداد، باعث یک سردرگمی فزاینده در بین جامعه فیزیک شده بود که نهایتا در سالهای ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷ توسط شرودینگر، هایزنبرگ، دیراک و بورن حل شد. این اتفاق بصورت مستقل توسط هایزنبرگ، شرودینگر و دیراک رخ داد و هرکدام یک صورت بندی متفاوت از این نظریه جامع ارایه دادند که به **مکانیک کوانتومی** [۱] معروف شد. البته بعدا فون نویمان ثابت کرد که این صورت بندی ها با یکدیگر معادلند. ما در این فصل با بررسی دو آزمایش مهم سعی خواهیم کرد بنیانهای اساسی رفتار طبیعت در مقیاس اتمی را بررسی کنیم و اصول موضوعه ی مکانیک کوانتومی را از دل نتایج این آزمایشها بیرون کشیده و معرفی کنیم. نشان میدهیم که «**به هیچ عنوان**» نمیتوان نتایج آنها را از طریق کلاسیکی توضیح داد و درون آنها قلب مکانیک کوانتومی نهفته است. به عبارتی این اصول به عنوان نتایجی ناگزیر از آزمایشهای فوق بدست می آیند که میتوانند تمام پدیده های کوانتومی را توصیف کنند.

برای معرفی اصول موضوعه ی مکانیک کوانتومی ما از صورت بندی دیراک که بر اساس فضاهای برداری و جبر خطی است استفاده میکنیم. چراکه بر این باوریم بیان این اصول با این صورت بندی، بخاطر ساختار مجرد آن، اصول موضوعه ی مکانیک کوانتومی را بهتر نشان میدهد. در فصول بعدی صورت بندی هایزنبرگ که به مکانیک ماتریسی معروف است، و صورت بندی شرودینگر که به مکانیک موجی شناخته میشود را معرفی خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که با بیان دیراک معادلند.

برخی کتابها ابتدا مستقلا یک فصل را به ریاضیات لازم برای مکانیک کوانتومی اختصاص میدهند. سعی ما بر این است که همزمان با بررسی آزمایشها، نیاز به ریاضیات مناسب را نشان دهیم و ساختار ریاضی مناسب را از دل نتایج آزمایش بیرون بکشیم. چراکه بدین شکل بیان مفاهیم و پدیده های فیزیکی به زبان ریاضی قابل فهم تر خواهد بود.

۱.۳ آزمایش دوشکافی یانگ

از آنجا که رفتار اتمی با تجربه های روزمره ما متفاوت است، بسیار مشکل است که به آن عادت کنیم و برای همه عجیب و رازآلود مینماید؛ چه یک فیزیک پیشه ی تازه کار، چه یک فیزیکدان کارآزموده. یعنی حتی متخصصین هم آنگونه که دوست دارند آن را نمیفهممند و این کاملا منطقی است. چراکه تمامی تجربه ها و شهود انسان، به عنوان یک موجود بزرگ مقیاس، فقط مربوط به مقیاسها و اشیاء بزرگ میشود: **ما هیچ تجربه ی مستقیمی در مقیاس اتمی نداریم.**

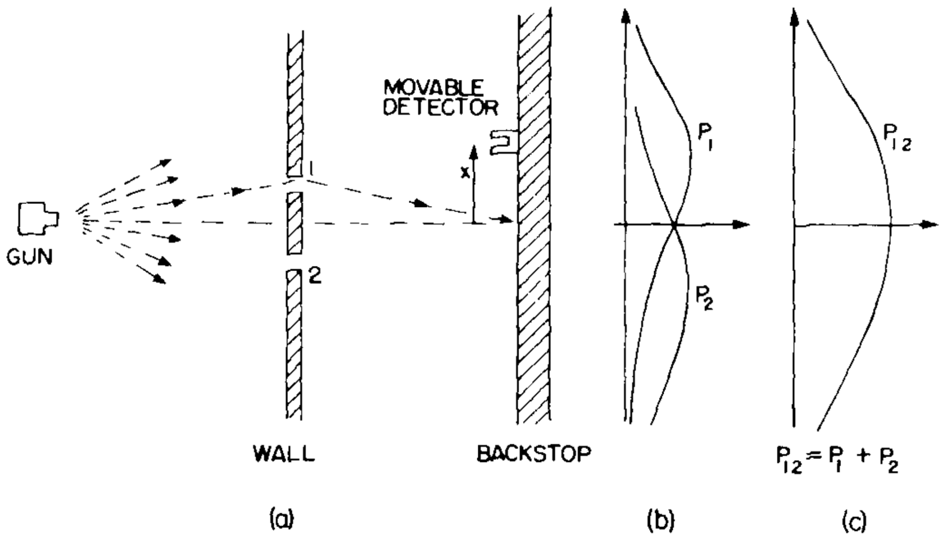
از آنجا که تجربیات ما نهایتا فقط در مقیاس های بزرگ است، باید بتوانیم و شاید به عبارتی ناگزیریم رفتار پدیده های اتمی و

[۱] Quantum Mechanics

زیراتمی را هم به این تجربیات مرتبط کنیم. پس در ابتدا با آزمایش دو شکافی برای دو پدیده ی کلاسیکی گلوله (به عنوان ذره) و آب (به عنوان موج) شروع میکنیم و و نشان میدهیم بر طبق این آزمایشها رفتار موجی و ذره ی پدیده ها چگونه است. سپس به مقیاس اتمی رفته و همین آزمایش را در حیطه ای که اثرات کوانتومی قوی هستند بررسی میکنیم و خواهیم دید وضعیت به سادگی و روشنی مقیاسهای بزرگ و فیزیک کلاسیک نیست و مجبور خواهیم شد اصولی را بنا نهیم که با اصول موضوعه ی پذیرفته شده در مقیاسهای بزرگ و کلاسیکی کاملا متفاوت و بعضا متعارض است.

۱.۱.۳ آزمایش با گلوله

در این آزمایش میخواهیم به این سوال جواب دهیم که مطابق شکل (۱.۳) احتمال اینکه گلوله ای از شکافها عبور کند و در فاصله x از مرکز به دیوار برخورد کند چقدر است. باید توجه داشت که ما مجبوریم از احتمال صحبت کنیم. چراکه نمیتوانیم با



شکل ۱.۳: ....

قطعیت بگوییم یک گلوله ی بخصوص دقیقا به کجا برخورد میکند. البته نکته ی مهم این است که قوانین مکانیک کلاسیک بر تمامی گلوله ها در طول حرکتشان، از لحظه ی شلیک تا عبور از شکافها و نهایتا برخورد به دیوار، حاکم است. به عبارتی اگر ما جنس و ابعاد گلوله را در نظر بگیریم، شرایط اولیه دقیق برای هر گلوله، مانند سرعت اولیه، تکانه ی زاویه ای اولیه، دمای اولیه و ... را بدانیم و همچنین تمامی برهمکنشهای گلوله با محیط، مانند مقاومت هوا، برخورد گلوله با دیواره های شکافها و ... را دقیقا بشناسیم، میتوانیم با حل معادلات حرکت دقیقا بگوییم هر گلوله در چه فاصله ای از مرکز دیوار برخورد میکند. به عبارتی این پدیده کاملا علی و تعینی است و اینکه ما از احتمال صحبت میکنیم نه به این علت است که این پدیده علی و تعینی نیست بلکه بخاطر کمبود اطلاعات ما از سامانه است. به عبارتی ما کمبود اطلاعات و ناآگاهی خود را بصورت احتمالات بیان میکنیم و با افزایش اطلاعات ما از سامانه نقش احتمال کاهش میابد. این نوع احتمال که در بیان پدیده های علی بکار میرود و ناشی از کمبود اطلاعات و نقص در محاسبات ما است **احتمال کلاسیکی** گوییم. تمامی پدیده هایی که ما در روزمره با آنها سروکار داریم و برای آنها از احتمالات صحبت میکنیم، مانند ریختن تاس، پیشبینی وضعیت هوا، برد و باخت یک تیم ورزشی و ... همگی از نوع احتمالات کلاسیکی هستند.

در این آزمایش فرض ما بر این است که گلوله ها غیرقابل شکستن هستند و همواره بصورت دانه ای و بسته با دیوار (که در اینجا نقش آشکارساز را دارد) میرسند. به عبارتی همواره یک گلوله ی کامل به آشکار ساز میرسد. با بستن هرکدام از شکافها میتوانیم احتمال عبور گلوله از شکاف دیگر را بدست آوریم. اگر Pr_1 احتمال عبور گلوله از شکاف ۱ و Pr_2 احتمال عبور گلوله از شکاف ۲ باشد، احتمال اینکه گلوله از یکی از این دو شکاف عبور کند وقتی هردو شکاف باز است یعنی Pr_{12} برابر است با

$$\mathrm{Pr}_{12} = \mathrm{Pr}_1 + \mathrm{Pr}_2 \ . \qquad (۱.۳)$$

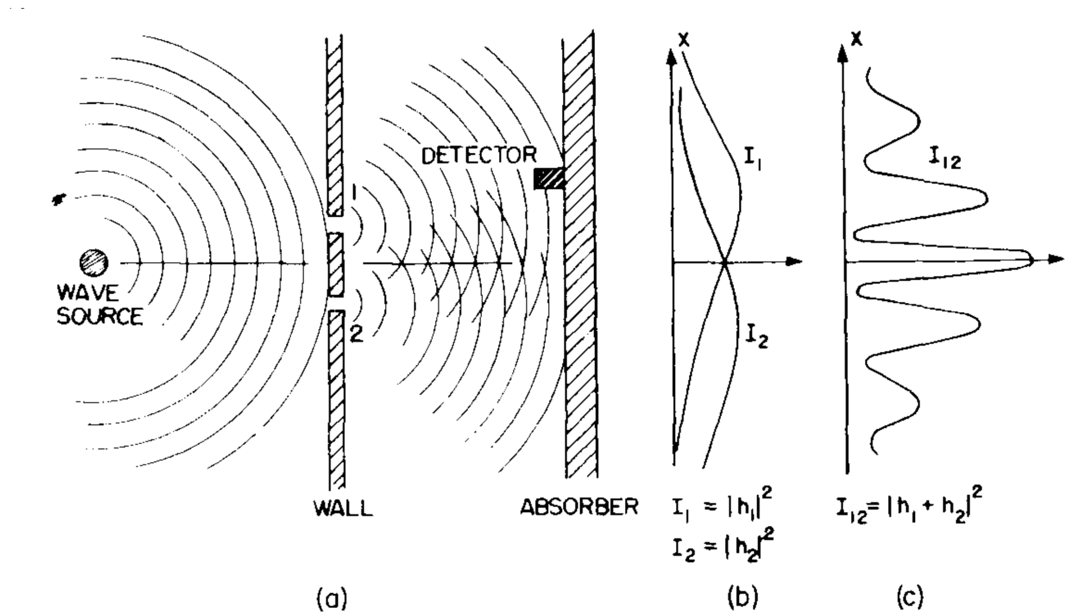
واضح است که احتمالها با هم جمع میشوند. به عبارتی احتمال عبور از شکاف ۱ مستقل از احتمال عبور از شکاف ۲ است. در این حالت میگوییم که نتیجه ی آزمایش حاکی از عدم تداخل یا **غیرتداخلی**[۲] است. در اینجا ما با گلوله ها که به وضوح ذره

[۲] non-interfering

هستند روبرو هستیم و این نتیجه (۱۱.۳) بیانگر خاصیت ذره ای است و هرکجا چنین نتیجه ای را مشاهده کردیم سامانه بصورت ذره ای رفتار میکند.

۲.۱.۳ آزمایش با امواج

در این قسمت آزمایش دو شکافی را برای امواج آب که پدیده ای کلاسیکی است که خاصیت موجی دارد تکرار میکنیم. استخری را در نظر بگیرید که وسط آن دیواره ای قرار داده شده و آن را به دو قسمت تقسیم کرده است. ایت دیواره دارای دو شکاف است که آب از آن طریق بین دو قسمت استخر جریان دارد. شکل (۲.۳) نمای استخر را از بالا نشان میدهد. فرض میکنیم که دیواره



شکل ۲.۳: ....

ها جاذب امواج هستند و امواج برنمیگردند. در سمت چپ سوزنی با بسامد معین به سطح آب ضربه میزند و امواج کروی در سطح آب تشکیل میدهد. در انتهای سمت راست، شناوری وجود دارد که شدت امواج آب را که متناسب با مربع ارتفاع آنهاست اندازه میگیرد و نقش آشکارساز را ایفا میکند. اصولا شدت یک موج متناسب با انرژی آن است که هردو متناسب با مربع بزرگی میدان هستند. پس عملا ما انرژی انتقالی را اندازه میگیریم.

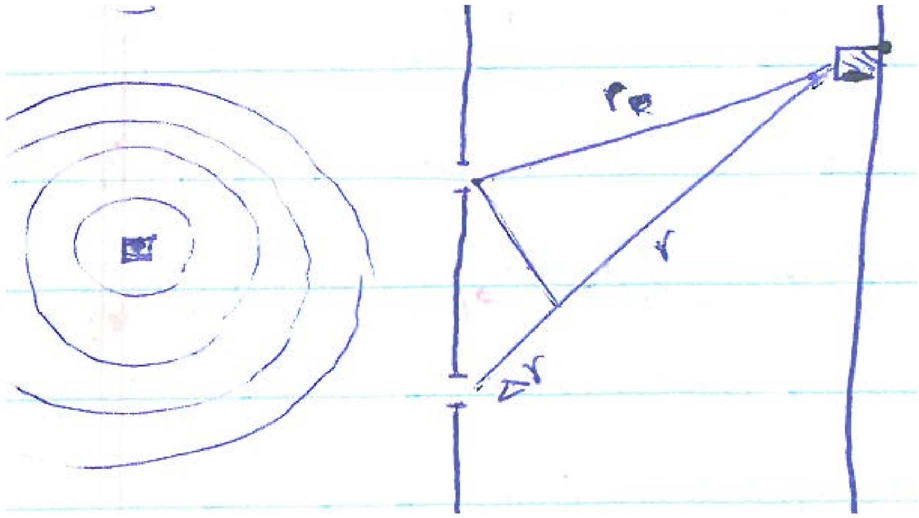
شدت موج **هر اندازه ای** میتواند داشته باشد و دیگر آن خاصیت **دانه بندی شده** گلوله (یا همان ذره) را ندارد. اگر شکاف ۱ باز و شکاف ۲ بسته باشد، شدت موج در هر نقطه از دیواره را با I_1 نشان میدهیم و I_2 هم به همین ترتیب تعریف میشود. همچنین با باز بودن هر دو شکاف، شدت موج در هر نقطه از دیواره را با I_{12} نشان میدهیم. با اندازه گیری I_1 و I_2 مطابق شکل (۲.۳) خواهیم دید که

$$I_{12} \neq I_1 + I_2\ . \tag{۲.۳}$$

در این حالت میگوییم بین دو موج **تداخل**[۳] ایجاد شده است. در محلهایی که I_{12} بیشینه است، دو موج از شکافهای ۱ و ۲ بصورت همفاز به هم رسیده اند (تداخل سازنده) و جاهایی که I_{12} کمینه است بصورت فاز متقابل (تداخل ویرانگر).

مطابق شکل (۳.۳)، زمانی تداخل سازنده داریم که فاصله ی آشکارساز از یک شکاف به اندازه ی مضربی از طول موج ($n\lambda$) با فاصله اش تا شکاف دیگر اختلاف داشته باشد و بنابراین اختلاف فاز امواج رسیده از شکافهای ۱ و ۲ به آشکارساز برابر $2n\pi$ باشد. همچنین زمانی تداخل ویرانگر داریم که این اختلاف فاصله مضربی فرد از نصف طول موج ($\lambda/2(2n+1)$) باشد که معادل اختلاف فازی برابر $\pi(2n+1)$ است.

[۳] interference



شکل ۳.۳: ....

با توجه به اینکه با پدیده ی موج سروکار داریم میتوانیم رابطه ی بین I_1، I_2 و I_{12} را به ترتیب زیر بیان کنیم. اگر دامنه ی موجی که توسط آشکارساز اندازه گیری میشود را بصورت قسمت حقیقی عبارت زیر

$$\mathfrak{h}_i = h_i e^{i\omega t} \,, \quad i = 1, 2 \,, \tag{۳.۳}$$

در نظر بگیریم که h_i عددی مختلط و دامنه موج است، خواهیم داشت:

$$I_1 = |h_1|^2 \,, \quad I_2 = |h_2|^2 \,. \tag{۴.۳}$$

حال زمانی که هر دو شکاف باز است، ابتدا دامنه ی هر دو موجی که به آشکارساز رسیده اند با یکدیگر جمع میشوند و سپس شدت کل از روی دامنه ی کل بصورت زیر بدست می آید:

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 \,. \tag{۵.۳}$$

واضح است که نتیجه با آنچه از آزمایش گلوله دیدیم متفاوت است:

$$|h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2|h_1||h_2|\cos\delta \,, \tag{۶.۳}$$

که δ اختلاف فاز بین موج h_1 و h_2 است. بنابراین بر حسب شدتها داریم:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \,, \tag{۷.۳}$$

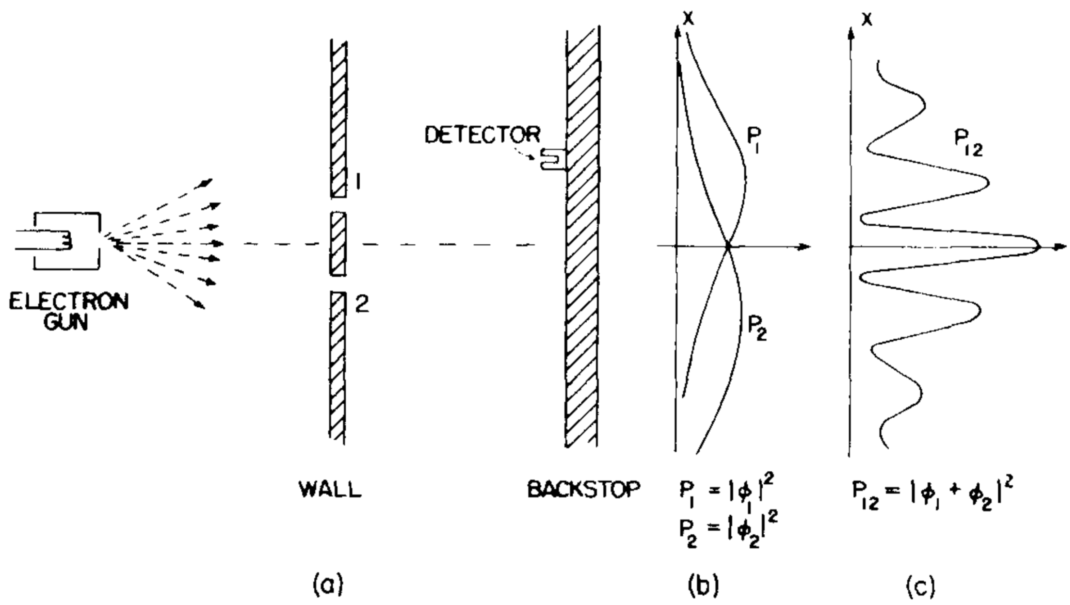
که جمله ی سوم سمت راست بیانگر نقش تداخلی است که مشاهده میشود. در جاهایی که δ برای مضارب زوج π است شاهد قله و تداخل سازنده و و جاهای که برابر مضارب فرد π است شاهد دره و تداخل ویرانگر هستیم.

۳.۱.۳ آزمایش با الکترون

حال بجای تفنگی که گلوله شلیک میکند مطابق شکل (۴.۳) تفنگ الکترونی را در نظر بگیرید. مثلا یک سیم تنگستن که نسبت به محفظه اش ولتاژ منفی دارد. الکترونها به بیرون شلیک میشوند. آشکارساز هم میتواند یک شمارشگر گایگر باشد یا یک چندبرابرکننده ی الکترون که به یک بلندگو وصل شده است. هربار که یک الکترون دریافت میکند یک صدای کلیک میشنویم. این آزمایش ذهنی و ساده شده است. البته نسخه های شبیه به آن برای ذراتی مانند ذره ی آلفا انجام شده است.

اگر این آزمایش را انجام دهیم نکات زیر از آن بدست می آید:

۱. ما همواره یک صدای تق واضح میشنویم.



شکل ۴.۳: ....

۲. همه ی تق ها مشابه هستند.

۳. هیچ تق نصفه ای نداریم.

با شمردن تقها در بازه ی زمانی طولانی میتوانیم نرخ متوسط تق را در هر نقطه بدست آوریم. با تغییر محل آشکارساز، نرخ تقها کندتر یا تندتر میشود اما بلندی صدای آنها تغییر نمیکند. اگر دو آشکار ساز را در دو جای مختلف قرار دهیم هر بار **فقط یکی** از آنها صدا میدهد و **هرگز** همزمان هردو صدا نمیدهند. پس نتیجه میگیریم:

۱. الکترونهایی که به آشکارسازها میرسند بصورت **دانه بندی شده** و کلوخه ای دریافت میشوند.

۲. همه ی کلوخه ها هم اندازه هستند. (صدای بلندگو برای همه یکسان است.)

۳. هربار فقط یک الکترون دریافت میشود.

بنابراین **الکترونها همواره بصورت ذرات دانه بندی شده ی یکسان دریافت میشوند.**

اکنون مانند آزمایش با گلوله باید به این سوال پاسخ دهیم که: احتمال یافتن یک دانه الکترون در محل x آشکارساز چقدر است؟ در کمال تعجب میبینیم نتیجه ی آزمایش وقتی هر دو شکاف باز است علی رغم انتظار ما مانند خروجی گلوله نبوده، بلکه شبیه خروجی آزمایش موج آب است. به عبارتی Pr_{12} در شکل c(۴.۳) مانند I_{12} در شکل c(۲.۳) است.

حال میخواهیم نمودار Pr_{12} را تحلیل کنیم. از آنجا که الکترونها بصورت دانه ای دریافت میشوند پس هرکدام از دانه های الکترون باید یا از شکاف ۱ یا از شکاف ۲ عبور کنند. پس گزاره ی زیر را داریم:

گزاره الف: هر الکترون یا از شکاف ۱ یا از شکاف ۲ عبور میکند.

با فرضا اینکه گزاره الف درست باشد به این نتیجه میرسیم که الکترونهای دریافتی در دو گروه دسته بندی میشوند: گروه یک آنهایی که از شکاف ۱ عبور کرده اند و گروه دو آنهایی که از شکاف ۲ عبور کرده اند. بنابراین باید احتمال عبور از شکاف ۱ یا ۲، (Pr_{12})، برابر مجموع احتمال عبور از شکاف ۱ و عبور از شکاف ۲ باشد، یعنی $\mathrm{Pr}_{12} = \mathrm{Pr}_1 + \mathrm{Pr}_2$. اما با بدست آوردن Pr_1 و Pr_2، که به ترتیب با بستن شکافهای ۲ و ۱ بدست می آیند، به این نتیجه میرسیم که: $\mathrm{Pr}_{12} \neq \mathrm{Pr}_1 + \mathrm{Pr}_2$. پس در اینجا با تداخل روبرو هستیم! با این نتیجه، بلافاصله این سوال مطرح میشود که:

سوال: الکترونها بصورت دانه ای هستند، پس چرا این طرح تداخلی بوجود آمد؟

یک جواب: ممکن است گفته شود الکترون به دو تکه شکسته میشود. اما این درست نیست. چون الکترونها همواره بصورت

دانه های یکسان دریافت میشوند.

یک جواب دیگر: الکترون از شکاف ۱ عبور میکند و سپس دور شکاف ۲ میچرخد و پس از یک مسیر پیچیده به آشکارساز میرسد و با بستن شکاف ۲ ما این امکان را از الکترون میگیریم. **اما** نقاطی وجود دارند که وقتی هر دو شکاف باز هستند تعداد کمی الکترون دریافت میکنند اما وقتی یکی از شکافها را میبندیم تعداد بیشتری الکترون دریافت میکنند. این یعنی با بستن یک شکاف تعداد الکترونهای عبوری از شکاف دیگر افزایش میابد. بعلاوه در مرکز نمودار، بیشینه ی Pr_{12} بیش از دو برابر مجموع $\mathrm{Pr}_1 + \mathrm{Pr}_2$ است. این یعنی با بستن یک شکاف تعداد الکترونهای عبوری از شکاف دیگر کاهش میابد. توضیح این دو اثر همزمان، با فرض اینکه الکترون از یک مسیر پیچیده عبور میکند غیرممکن است.

توضیح این پدیده اگرچه بسیار مشکل است،اما ریاضیات آن بسیار ساده است: اگر Pr_{12} را مثل I_{12} در نظر بگیریم، مانند حالت موج که $I_i = |h_i|^2$، که h_i عددی مختلط بود، اتفاقاتی که در آشکارساز می افتد را میتوان با دو عدد مختلط ϕ_1 و ϕ_2 توصیف کرد به قسمی که

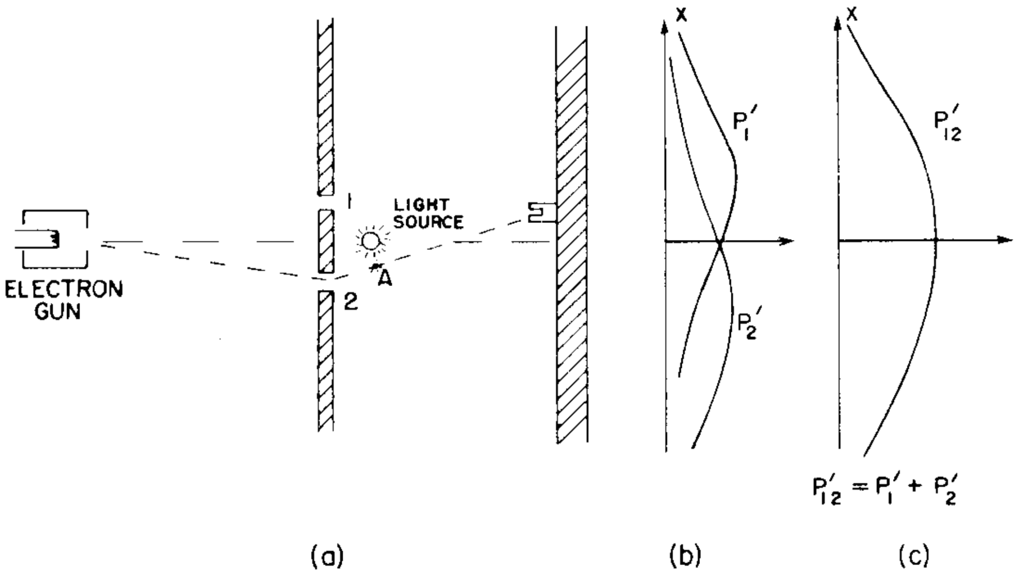
$$\mathrm{Pr}_1 = |\phi_1|^2\,, \quad \mathrm{Pr}_2 = |\phi_2|^2\,, \quad \mathrm{Pr}_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2\,, \tag{۸.۳}$$

میبنیم که ریاضیات کاملا شبیه رفتار موج است. پس نتیجه میگیریم که الکترون مانند ذرات دریافت میشود اما احتمال دریافت این ذرات مانند موج توزیع میشود. به همین دلیل است که میگوییم الکترون گاهی مانند ذره و گاهی مانند موج رفتار میکند.

در امواج آب، ارتفاع آب قسمت حقیقی دامنه بود، اما در اینجا دامنه ی ϕ باید کمیتی مختلط باشد. قسمت جقیقی به تنهایی کارامد نیست. از آنجا که $P_{12} \neq P_1 + P_2$، پس نتیجه میگیریم که گزاره ی الف اشتباه است.

مشاهده ی الکترون

حال آزمایشی را طراحی میکنیم که بفهمیم الکترون از کدام شکاف عبور کرده است. یک میدان الکتریکی قوی در پشت دیواره



شکل ۵.۳: ....

برقرار میکنیم. اگر الکترون از شکاف ۱ عبور کرد، درخشش A ناشی از برهمکنش الکترون با میدان الکتریکی در نزدیکی شکاف ۱ دیده میشود و به همین ترتیب برای شکاف ۲. هربار که صدای تق را از آشکارساز میشنویم، یک درخش در نزدیکی شکاف ۱ یا ۲ میبینیم. ولی **هرگز** دو درخش همزمان در نزدیکی هردو شکاف نمیبینیم. پس نتیجه ای که میگیریم این است که الکترون یا از شکاف ۱ یا از شکاف ۲ عبور میکند. بنابراین علی الظاهر بلحاظ آزمایشی گزاره الف صحیح است. پس اگر گزاره الف صحیح است چرا $P_{12} \neq P_1 + P_2$؟ اگر به آزمایش برگردیم و تعداد الکترونهای عبوری از شکاف ۱ را در ستون ۱ و تعداد الکترونهای عبوری از شکاف ۲ را در ستون ۲ بنویسیم، و احتمالهای مربوطه را به ترتیب با Pr'_1 و Pr'_2 نشان دهیم خواهیم دید که توزیع Pr'_1 شبیه Pr_1 و توزیع Pr'_2 شبیه Pr_2 بدست می آید. بنابراین الکترون هیچ مسیر پیچیده ای را طی نمیکند. بلکه وقتی آنرا مشاهده میکنیم، همانگونه که انتظار داریم رفتار میکند یعنی: مستقل از باز یا بسته بودن شکافها، الکترونهایی که از شکاف ۱ عبور میکنند همان توزیعی را دارند که اگر شکاف ۲ باز یا بسته بود میداشتند.

حال احتمال کل وقتی هردو شکاف باز باشند یعنی Pr'_{12} چقدر است؟ ما از قبل این احتمال را محاسبه کرده ایم. فقط وانمود میکنیم که به درخش ها نگاه نکرده ایم و تنها تق های اندازه گیری شده که در دو ستون مرتب شده اند را با هم جمع میکنیم. فقط **باید** اعداد را با هم **جمع** کنیم. برای احتمال اینکه الکترون از شکاف ۱ یا ۲ عبور کرده و به آشکارساز برسد خواهیم داشت: $\mathrm{Pr}'_{12} = \mathrm{Pr}'_1 + \mathrm{Pr}'_2$ یعنی اگرچه ما موفق شدیم مشاهده کنیم که هر الکترون از کدام شکاف عبور میکند، اما دیگر نقش تداخلی Pr_{12} را بدست نمی آوریم، بلکه توزیع جدید Pr'_{12} را بدست می آوریم که بیانگر عدم تداخل است. اگر میدان الکتریکی را خاموش کنیم، مجددا Pr_{12} بدست می آید! بنابراین باید چنین نتیجه بگیریم که توزیع الکترونها روی صفحه **وقتی آنها را مشاهده میکنیم** با زمانی که مشاهده نمیکنیم متفاوت است.

شاید چنین گفته شود که با تلاش برای مشاهده الکترون، حرکت آنرا تحت تاثیر قرار داده ایم. یعنی میدان الکتریکی به آن نیرو وارد کرده و مسیر آن را عوض کرده است. بنابراین از یک منبع نور ضعیفتر استفاده میکنیم و شدت نور را کاهش میدهیم. با کم کردن شدت نور میبینیم که همچنان صدای تق با همان شدت به گوش میرسد و درخش ها هم با همان شدت دیده میشود. فقط گاهی صدای تق را میشنویم اما درخشی نمیبینیم. به عبارتی الکترون از دیده شدن فرار کرده است. انگار نور هم مانند ذره عمل میکند (که آنرا در فصل قبل فوتون نامیدیم) و با کم کردن شدت آن، تعداد فوتون ها کم شده و درخشهای کمتری دیده میشود. بنابراین اگر ما هربار که صدای تق را میشنویم و درخش را میبینیم، الکترونهایی را مشاهده کردیه ایم که توسط نور مختل شده اند. اگر نتیجه ی آزمایش را با منبع نور کم بدست آوریم، میبینیم که الکترونهایی که مشاهده نشده اند دارای طرح تداخلی هستند. پس اگر الکترونها دیده نشوند دارای طرح تداخلی هستیم.

سوال مهمی که در اینجا مطرح میشود این است که: آیا راهی وجود دارد که الکترون را **بدون مختل کردن** آن مشاهده کنیم؟ از رابطه ی دوبروی $p = h/\lambda$ میفهمیم که بجای شدت باید بسامد را کاهش دهیم. پس با یک نور با بسامد کمتر کار را ادامه میدهیم. با افزایش طول موج λ مشکلی که پیش می آید این است که زمانی که طول موج از مرتبه ی فاصله ی بین شکافها بشود، ما هربار یک درخش بزرگ درهم برهم میبینیم و دیگر نمیتوانیم بگوییم الکترون از کدام شکاف عبور کرده است. در این حالت است که Pr'_{12} شروع میکند به شبیه شدن به Pr_{12}؛ یعنی اثرات تداخلی کمکم ظاهر میشوند.

نتیجه: غیر ممکن است که نور را به طریقی تنظیم کنیم که بتوان گفت الکترون از کدام شکاف عبور میکند و همزمان طرح تداخلی از بین نرود.

این نتیجه حالتی از **اصل عدم قطعیت** است که توسط هایزنبرگ پیشنهاد شد و در فصل قبل راجع به آن صحبت شد و از قرار زیر است:

قوانین جدید طبیعت (قوانین کوانتوم) نمیتوانند سازگار و بدون تناقض باشند مگر اینکه **یک محدودیت بنیادی** روی تواناییهای آزمایش کردن و مشاهده ی ما باشد که قبلا شناخته شده نبود.

نظریه مکانیک کوانتومی وابسته به صحت اصل عدم قطعیت است. از آنجا که مکانیک کوانتومی یک نظریه موفق است، اعتقاد ما به اصل عدم قطعیت قویتر شده است.

پس بصورت خلاصه نتایج زیر را بدست آوردیم:

۱. احتمال Pr یک رویداد برابر مربع بزرگی کمیتی مختلط بنام دامنه ی احتمال ϕ است که داریم:

$$\mathrm{Pr} = |\phi|^2 \,, \tag{۹.۳}$$

۲. وقتی یک رویداد از چند راه مختلف رخ دهد، دامنه ی احتمال برابر مجموع دامنه های احتمال هرکدام از راهها است:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \,, \quad \mathrm{Pr} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \,. \tag{۱۰.۳}$$

به این رابطه **اصل برهمنهی**[۴] گویند. این نوع احتمال که در آن بجای جمع کردن احتمال راههای مختلف، ابتدا دامنه های احتمال را با هم جمع میکنیم و سپس از دامنه ی کل احتمال کل را بدست می آوریم **احتمال کوانتومی** گویند.

۳. اگر آزمایشی انجام شود که قادر باشد بگوید کدامیک از راههای ممکن واقعا انتخاب شده است (مانند آزمایش دوشکافی گلوله)، احتمال رویداد برابر مجموع احتمالهای هرکدام از راههاست:

$$\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_1 + \mathrm{Pr}_2 \,. \tag{۱۱.۳}$$

[۴] superposition principle

این نتایج، بویژه نتیجه ی دوم یا همان اصل برهمنهی، بوضوح با تجارب روزمره ی ما در تعارض است. در تجارب روزمره ی ما، یک سامانه از بین انتخابهایی که در پیش رو دارد، در آن واحد فقط میتواند یکی را انتخاب کند. درحالیکه در مکانیک کوانتومی، سامانه میتواند بصورت همزمان حالتهایی در حالتهایی باشد که با هم متعارض هستند. شاید کسی بپرسد چگونه چنین چیزی ممکن است؟ پش پرده ی این قوانین چیست؟ جواب: **هیچکس نمیداند!** و هیچ جواب عمیقتر و بنیادی تری هم وجود ندارد.

ممکن است گفته شود که الکترون دارای یک نوع فرآیند ناشناخته یا **متغیرهای پنهان**[۵] است که هنوز آنها را نمیشناسیم و اگر از آنها آگاهی یابیم میتوانیم دقیقا بگوییم هر الکترون چه مسیری را انتخاب میکند بدون اینکه الگوی تداخلی به هم بریزد. این موضوع از دهه های میانی قرن بیستم مورد کاوش قرار گرفت و بویژه جان استوارت بِل[۶] نامساویهایی را بدست آورد که در صورت تایید آزمایشگاهی آنها، وجود متغیرهای پنهان مورد تایید قرار میگرفت. ولی تا به امروز تمام آزمایشهایی که انجام شده است نامساویهای بل را نقض کرده اند و تاکنون وجود متغیرهای پنهان تایید نشده است.

شکل (۶.۳) نتایج آزمایش دوشکافی با اتمهای هلیوم را نشان میدهد[۷]. ابعاد صفحه حدود ۱۶۰ میکرون است. نتایج آزمایش در ۷ شکل از بازه ی زمانی ۵ دقیقه تا ۴۲ ساعت و ۱۸ دقیقه نشان داده شده است. این آزمایش بخوبی دوگانگی موج-ذره را در مکانیک کوانتومی نشان میدهد. در دقایق اول (تا دقیقه ی ۵) توزیع ذرات اتم هلیوم بر روی پرده ظاهرا کاتوره ای است. اما با گذشت زمان نقش تداخلی به تدریج ظاهر میشود. میبینیم که بعد از زمان ۴۲ ساعت و ۱۸ دقیقه، توزیع نقش تداخلی بوضوح دیده میشود که معادل Pr_{12} در معادله ی (۸.۳) و شکل (۴.۳) است.

دامنه ی احتمال

گفتیم که کمیت اساسی دامنه ی احتمال ϕ است. به حدی از این کمیت استفاده میکنیم که برای آن نوشتاری ابداع کرده اند:

$$\phi = \langle \text{ذره به محل } x \text{ میرسد} | \text{ذره } s \text{ را ترک میکند} \rangle \ . \tag{۱۲.۳}$$

به این کمیت براکت میگوییم. اصولا براکت $\langle \ldots \rangle$ معادل است با **دامنه ی احتمال اینکه...** . در براکت (۱۲.۳)، قسمت راست یعنی $|s\rangle$ (که به آن کت میگوییم) بیانگر حالت ابتدایی و قسمت چپ یعنی $\langle x|$ (که به آن برا میگوییم) بیانگر حالت نهایی است. این نمادنگاری را اولین بار دیراک ابداع کرد. در بخشهای آینده خواهیم دید که براها و کتها مانند بردارها رفتار میکنند.

گاهی راحت تر است که حالتهای اولیه و نهایی را (برای خلاصه نویسی) صرفا با یک حرف نمایش دهیم که داریم

$$\phi = \langle x|s\rangle \ , \tag{۱۳.۳}$$

که میشود دامنه ی احتمال اینکه ذره ای که s را ترک کرده است در محل x روی پرده برخورد کند. واضح است که براکت کمیتی مختلط است، چراکه باید بتواند الگوی تداخلی Pr_{12} را توصیف کند.

گفتیم که اگر دو یا چند امکان برای یک رویداد وجود داشته باشد، احتمال مربوط برابر مجموع احتمالها نیست بلکه دامنه احتمال کل برابر مجموع دامنه های احتمال راههای ممکن است؛ بنابراین:

$$\langle x|s\rangle_{12} = \langle x|s\rangle_1 + \langle x|s\rangle_2 \ , \tag{۱۴.۳}$$

که بیان اصل برهمنهی با زبان براکت است. عبارت بالا را میتوان با جزییات بیشتری بررسی کرد. براکت $\langle x|s\rangle_1$ را میتوان به دو مرحله ی متوالی تقسیم کرد: دامنه ی احتمال رسیدن الکترون از منبع s به شکاف ۱ **و سپس** رسیدن الکترون از شکاف ۱ به محل x که به ترتیب با برکتهای $\langle 1|s\rangle$ و $\langle x|1\rangle$ نشان داده میشوند را میتوان بصورت **حاصلضرب** دامنه ی احتمال مرحله ی اول در دامنه ی احتمال مرحله ی دوم به شکل زیر نوشت:

$$\langle x|s\rangle_1 = \langle x|1\rangle \langle 1|s\rangle \ . \tag{۱۵.۳}$$

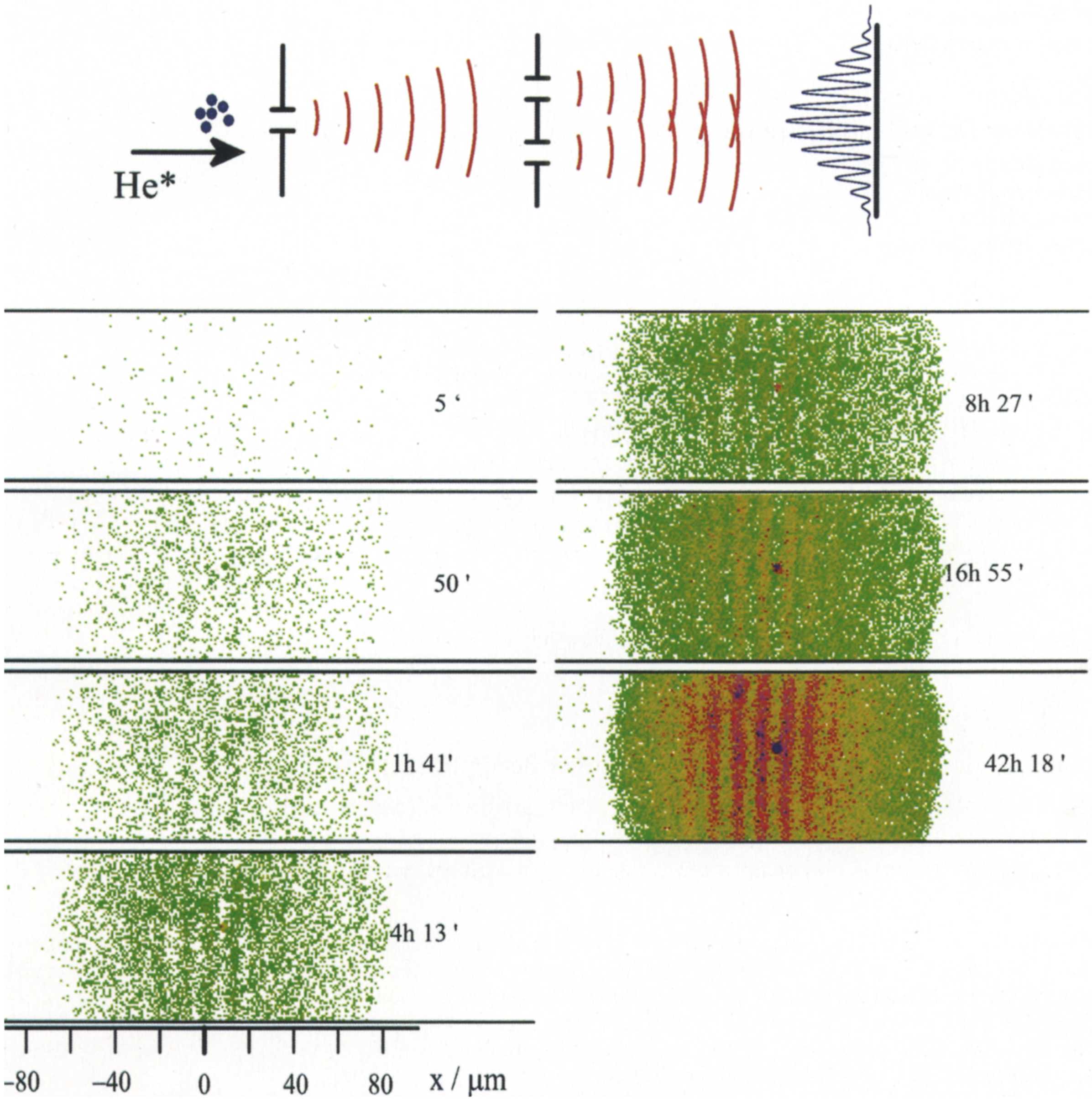
بنابراین رابطه ی (۱۴.۳) را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\langle x|s\rangle_{12} = \langle x|1\rangle \langle 1|s\rangle + \langle x|2\rangle \langle 2|s\rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle x|i\rangle \langle i|s\rangle \ . \tag{۱۶.۳}$$

[۵] hidden variables

[۶] John Stewart Bell

[۷] O. Carnal and J. Mlynek, *Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2689 (1991).
Ch. Kurtsiefer, T. Pfau and J. Mlynek, *Measurement of the Wigner function of an ensemble of helium atoms*, Nature, **386**, 150 (1997).



شکل ۶.۳: ....

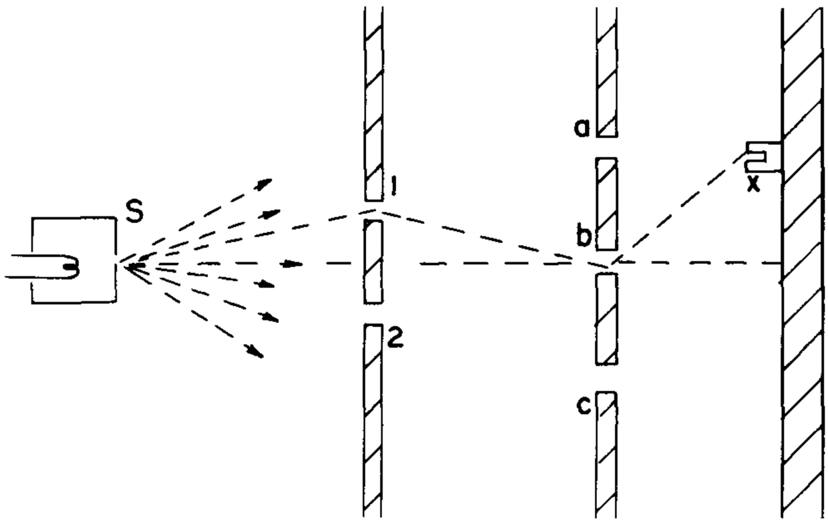
بنابراین میتوان **اصل سوم** را بصورت زیر بیان کرد:

> اگر ذره ای یک مسیر مشخص را طی کند، دامنه ی احتمال آنرا میتوان بصورت **حاصلضرب** دامنه ی احتمال رفتن قسمتی از مسیر در دامنه ی احتمال رفتن باقیمانده ی مسیر نوشت.

برای بررسی بهتر اصل سوم، آزمایش دوشکافی را با برپایشی پیچیده تر مطابق شکل (۷.۳) بررسی میکنیم. حال دامنه ی احتمال اینکه الکترون s را ترک کرده و در نقطه x روی پرده مشاهده شود را محاسبه میکنیم. مطابق شکل (۷.۳) الکترون در مرحله اول باید از شکاف ۱ یا ۲ و سپس در مرحله ی بعد از یکی از شکافهای a یا b یا c عبور کند تا به نقطه ی x روی پرده برسد. با توجه به اصل برهمنهی و اصل سوم داریم:

$$\langle x|s\rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\alpha=a,b,c} \langle x|\alpha\rangle \langle \alpha|i\rangle \langle i|s\rangle \ . \qquad (۱۷.۳)$$

تمرین ۱.۳. رابطه ی (۱۷.۳) را بدست آورید. □



شکل ۷.۳: ....

در نهایت برای اینکه بتوانیم محاسبات را انجام دهیم لازم است که دامنه احتمال را محاسبه کنیم. این یکی از اساسی ترین مسایل مکانیک کوانتومی است.

۴.۱.۳ آزمایش دوشکافی تاخیری

۲.۳ آزمایش ماخ-زندر

آزمایش دیگری که مانند آزمایش دوشکافی یانگ، میتوان از آن رفتارهای کوانتومی ذرات و اصول موضوعه ی مکانیک کوانتومی را استنتاج کرد آزمایش ماخ-زندر[۸] است که در آن بجای باریکه های الکترونی از باریکه ی فوتونی استفاده میشود. ابتدا این آزمایش را با پرتوی لیزر شرح میدهیم که بیانگر خاصیت کلاسیکی موجی نور است. سپس همین آزمایش را بجای پرتوی لیزر با تک فوتون توضیح خواهیم داد که ویژگیهای کوانتومی نور را نمایان میکند.

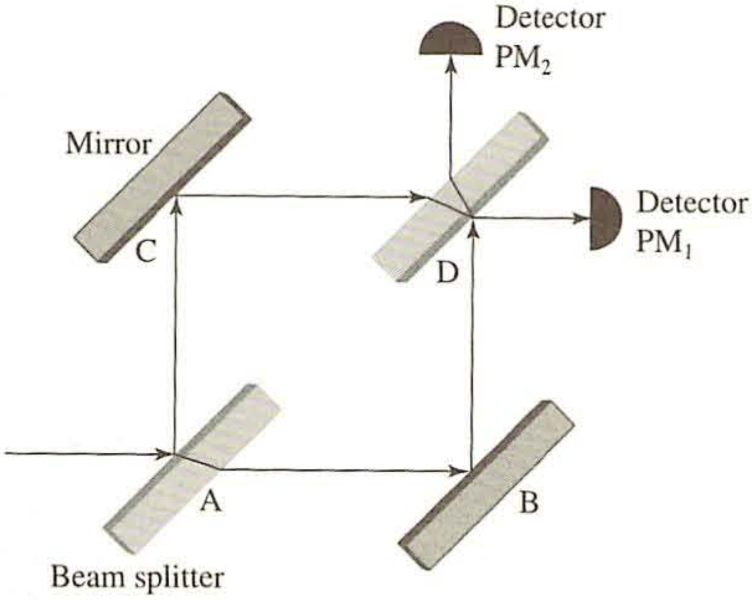
۱.۲.۳ آزمایش ماخ-زندر کلاسیکی

برپایش این آزمایش را در شکل (۸.۳) مشاهده میکنیم. در این آزمایش، پرتو تکفام نور لیزر از سمت چپ تابانیده میشود. قطعات A و D جداساز پرتو[۹] یا به اختصار BS هستند. جداسازهای پرتو، آینه هایی نیمه نقره اندود هستند که نیمی از نور تابیده را بازمیتابانند و نیم دیگر را عبور میدهند. قطعات B و C آینه و آشکارسازهای PM_1 و PM_2 چندبرابرکننده های فوتونی هستند که وظیفه ی آشکارسازی فوتونهای دریافت شده را دارند. پرتوهای نور لیزر تابیده شده، پس از برخورد به جداساز پرتو A به دو باریکه تقسیم شده و در دو مسیر بالا (ACD) و پایین (ABD) منتشر میشوند. همچنین بازوهای افقی بالایی (CD) و پایینی (AB) و همچنین بازوهای عمودی چپ (AC) و راست (BD) دقیقا با هم برابر است. اگر اختلاف فاز نور در مسیرهای بالا و پایین هنگامی که به هریک از آشکاسازهای PM_1 یا PM_2 میرسند مضربی زوج از π باشد، بدین معناست که پرتوها همفاز به آشکار ساز رسیده، تداخل سازنده داریم و آشکارساز خروجی روشن داریم. به عکس اگر اختلاف فاز مضربی فرد از π باشند، تداخل ویرانگر و آشکارساز خروجی تاریک خواهد داشت. در اختلاف فازهای بین این دو مقدار، هرچه به سمت تداخل سازنده برویم خروجی روشنتر و هرچه به سمت تداخل ویرانگر برویم خروجی تاریکتر میشود.

برای محاسبه ی اختلاف فاز پرتوهای نور در مسیرهای بالا و پایین، ابتدا چند نکته از اپتیک را یادآوری میکنیم:

۱. در محیطی با ضریب شکست n سرعت نور برابر است با $v = c/n$. بنابراین سرعت نور در شیشه حدودا $\frac{2}{3}$ سرعت نور در هواست.

[۸] Mach-Zehnder
[۹] beam splitter



شکل ۸.۳: ....

۲. با توجه به معادله ی (؟؟) وقتی نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ میشود ($n_2 > n_1$)، در مرز دو محیط نور بازتابیده به داخل محیط رقیق نسبت به نور تابشی اختلاف فازی برابر π دارد. ضریب شکست آینه ی کامل بسیار زیاد و عملا بنیهایت است. پس نور بازتابی از سطح آینه نسبت به نور فرودی اختلاف فاز π دارند.

۳. با توجه به معادله ی (؟؟) وقتی نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق میشود ($n_2 < n_1$)، نور بازتابی از مرز دو محیط به داخل محیط غلیظ نسبت به نور فرودی اختلاف فاز ندارد.

۴. با توجه به معادله ی (؟؟) وقتی نور از محیطی به محیط دیگر وارد میشود در مرز دو محیط نور عبوری نسبت نور فرودی اختلاف فاز ندارد اما مسیرش شکسته میشود.

۵. وقتی نور از محیطی رقیق مانند هوا به محیطی غلیظ مانند تیغه ی شیشه ای وارد میشود، بخاطر تغییر سرعتش نسبت به نوری که به تیغه وارد نشده است فاز آن تغییر میکند که میزان آن به ضریب شکست محیط و طول مسیر نور در محیط بستگی دارد.

بر اساس نکات بالا، ابتدا نوری که به آشکارساز PM_1 میرسد را تحلیل میکنیم:

۱. نور از بازوی بالا (ACD) ابتدا از جداساز پرتو A بازتابیده شده و نسبت به نور فرودی اختلاف فاز π رادیان پیدا میکند. سپس از آینه ی C بازتابیده میشود و اختلاف فاز π به آن اضافه میشود. سپس وارد جداساز پرتو D شده و بسته به ضخامت و ضریب شکست D اختلاف فاز δ پیدا میکند. بنابراین اختلاف فاز نور رسیده به PM_1 از بازوی بالایی برابر است با $\pi + \pi + \delta = 2\pi + \delta$.

۲. با استدلال مشابه نور رسیده به آشکارساز PM_1 از مسیر پایین دارای اختلاف فاز $\delta + \pi + \pi = 2\pi + \delta$ است.

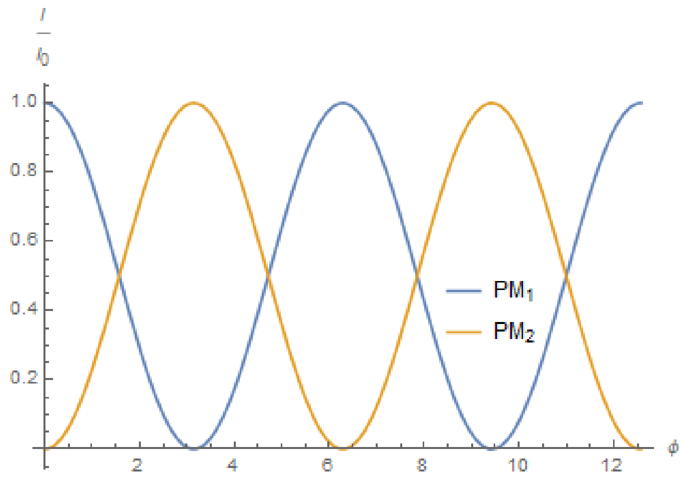
بنابراین هردو پرتو با فاز مشابه به آشکارساز PM_1 میرسند و تداخل سازنده خواهیم داشت و شدت نور در آشکارساز بیشینه است. با استدلال مشابه برای آشکارساز PM_2، پرتو از مسیر بالایی دارای اختلاف فاز $\pi + \pi + \delta + \delta = 2\pi + 2\delta$، و از مسیر پایینی اختلاف فاز $\delta + \pi + \delta = \pi + 2\delta$ خواهد داشت. بنابراین این دو پرتو با اختلاف فاز π رادیان به آشکارساز PM_2 میرسند که باعث تداخل ویرانگر شده و خروجی تاریک و شدت کمینه ی صفر خواهیم داشت.

حال اگر در مسیر CD یک تیغه ی شیشه ای قرار دهیم، بسته به ضریب شکست و ضخامت آن، سرعت پرتو عبوری و مدت زمان عبور از تیغه کاهش خواهد یافت که باعث ایجاد اختلاف فاز نسبت به پرتو مسیر AB خواهد شد. این اختلاف فاز ϕ را میتوان با تغییر ضخامت تیغه ی شیشه ای تغییر داد. راه دوم تغییر محل آینه ی B است تا طول مسیر طی شده را افزایش داده و اختلاف راه ایجاد شده باعث ایجاد اختلاف فاز مورد نظر شود.

اگر شدت نور فرودی I_0 باشد، و شدت نور دریافتی در آشکارسازهای PM_1 و PM_2 را برای اختلاف فازهای ϕ مختلف اندازه بگیریم، با فرض عدم اتلاف، این شدتها برابرند با

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1+\cos\phi)\;, \quad I_2 = \frac{I_0}{2}(1-\cos\phi)\;, \tag{۱۸.۳}$$

که در شکل (۹.۳) رسم شده اند و بوضوح نشان دهنده ی طرح تداخلی بین امواج عبوری از مسیر بالا و پایین است.



شکل ۹.۳: ....

تمرین ۲.۳. روابط (۱۸.۳) را بدست آورید. □

تا به اینجا آزمایش ماخ-زندر و خروجی آن به عنوان طرح تداخلی که حاکی از رفتار موجی پرتو لیزر تابانیده شده است را مطالعه کردیم. مشخص است که اگر نور را به عنوان پدیده ای موجی در نظر بگیریم، طرح تداخلی خواهیم داشت که با خروجی آزمایش هم همخوانی دارد. در ادامه نسخه ای از این آزمایش را بررسی میکنیم که در آن، مانند آزمایش دوشکافی با الکترون، وضعیت چندان ساده نیست!

۲.۲.۳ آزمایش ماخ-زندر کوانتومی

فرض کنید این بار شدت نور تابانیده ی ابتدایی را به حدی کاهش دهیم که هربار فقط یک فوتون به دستگاه ماخ-زندر فرستاده شود. آشکارسازهای PM_1 و PM_2 چندبرابر کننده های فوتونی هستند که قادر به آشکارسازی دریافت هر تک فوتون هستند. یک **واقعیت آزمایشی** مهم این است که در هربار، تک فوتون ارسالی فقط توسط یکی از آشکارسازهای PM_1 یا PM_2 دیده میشود و **هرگز** هردو آشکارساز **همزمان** یک فوتون را نمیبینند.

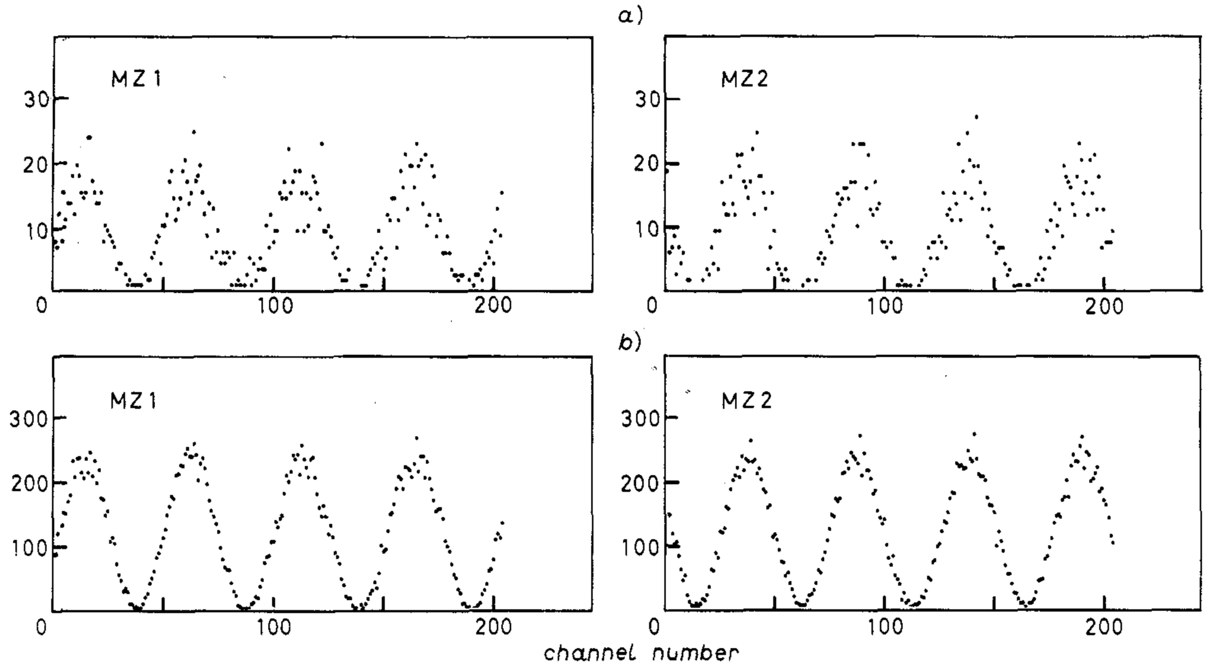
اگر این آزمایش را برای N فوتون که $N \gg 1$ برای یک اختلاف فاز مشخص ϕ انجام دهیم و آن را برای ϕ های مختلف از صفر تا 2π تکرار کنیم، تعداد دفعاتی که فوتون توسط PM_1 و PM_2 آشکار میشود برابر است با

$$N_1 = \frac{N}{2}(1+\cos\phi)\;, \quad N_2 = \frac{N}{2}(1-\cos\phi)\;. \tag{۱۹.۳}$$

مجددا اگر $\phi = 0$ باشد PM_1 کلیک میکند و PM_2 کلیک نمیکند. این آزمایش در سال ۱۹۸۶ توسط آلن اسپه، فیلیپ گرانجیر و روژه انجام شد[۱۰]. آنها با تغییر محل آینه در گامهای $\lambda/50$، که λ طول موج فوتون تابیده است، اختلاف فاز ϕ را تولید کردند. خروجی آزمایش آنها در شکل (۱۰.۳) نشان داده شده است.

محور افقی گامهای آینه و محور عمودی تعداد فوتونهای دریافتی است. در شکلهای بالا (a) تعداد فوتونهای کمتر در مدت زمان کمتری توسط آشکارسازها دریافت شده است. در شکلهای پایین (b) مدت زمان و نتیجتا تعداد فوتونهای دریافتی افزایش

[۱۰] Grangier, P., Roger, G., and Aspect, A., *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on singlephoton interferences*, Europhysics Letters, **1**, 173–79 (1986)



شکل ۳.۱۰: ....

یافته است. واضح است که نقش تداخلی با افزایش تعداد فوتونها آشکار میشود. شکل (۳.۱۰) دقیقا همان نقش تداخلی شکل (۳.۹) را، منتها برای شلیک **تک فوتون** نشان میدهد. بنابراین نتیجه میگیریم که **یک فوتون خودش با خودش تداخل کرده است.** این اثر خودتداخلی[۱۱] توسط چندین آزمایش بررسی شد که یک مورد آن را اینجا بیان کردیم. (پانویس ۱۰ را ببینید.)

این اثر خودتداخلی ما را مجبور به پذیرش این نکته میکند که فوتون در یکی از دو بازوی آزمایش ماخ-زندر جایگزیده[۱۲] نیست و حتما بصورت **همزمان** در هر دو بازو گسترده شده است که باعث دیدن چنین طرح تداخلی شده است.

حال فرض کنید جداساز پرتو A را حذف کنیم. در این حالت فوتون از مسیر پایین طی مسیر میکند و کاملا از این مسیر منتقل میشود. ما حالت فوتون در این مرد را را $|\psi_1\rangle$ نشان میدهیم. از طرفی اگر فوتون را با یک آینه جایگزین کنیم، فوتون حتمن از مسیر بالایی طی طریق خواهد کرد. حالت فوتون در این مورد را با $|\psi_2\rangle$ نشان میدهیم.

به عنوان یک نتیجه: اگر جداساز پرتو A را سر جای خود برگردانیم، برای توجیه طرح تداخلی ناچاریم که حالت فوتون را یک **برهمنهی** از هر دو حالت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ است. بنابراین به اصل زیر میرسیم:

> **اصل برهمنهی:** اگر یک سامانه ی کوانتومی بتواند در یکی از دو یا چند حالت باشد، میتواند در هر ترکیب خطی (برهمنهی) از آنها نیز باشد، یعنی:
>
> $$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \ . \qquad (۳.۲۰)$$

اصل برهمنهی میگوید امکان ندارد بتوان یک مسیر مشخص به فوتون نسبت داد، بلکه حالت فوتون ترکیبی از هر دو مسیر است. یعنی فوتون **ناجایگزیده**[۱۳] است. این اصل یک نقض آشکار اصل اساسی مکانیک کلاسیک، تعینیت کامل، است که بیان میکند حالت سامانه کاملا معلوم است و بر اساس آن فوتون **یا** در مسیر بالا **یا** در مسیر پایین است. در حقیقت رابطه ی (۳.۲۰) برهمنهی دو حالت است و نمیتوان آنرا به صورت برهمنهی دو موج کلاسیکی تعبیر کرد. چراکه دو موج کلاسیکی، هردو گسترش مکانی دارند و **دو موج مجزا** هستند. اما در اینجا هر دو حالت مربوط به **یک سامانه** (در اینجا یک فوتون) است. بنابراین خاصیت موجی-ذره ای فوتون را نمیتوان به صورت کلاسیکی در نظر گرفت و فهم کرد.

حال مانند آزمایش دوشکافی میخواهیم بفهمیم فوتون از کدام مسیر عبور کرده است. میدانیم در اختلاف فاز $\phi = \pi$ $(\phi = 0)$ آشکارساز PM_1 (PM_2) هرگز تق نخواهد کرد. این خروجی تاریک را میتوان برای آشکار کردن وجود یک مانع در

[۱۱] self-interference
[۱۲] localized
[۱۳] delocalized

یکی از دو مسیر بدون اینکه مستقیما با آن برهمکنش داشت استفاده کرد. فرض کنیم مانعی را در بازوی پایینی تداخل سنج قرار میدهیم و همچنین $\phi = 0$. حال اگر PM_2 تق کرد به ما میگوید که فوتون حتما از بازوی بالایی عبور کرده است. اما همزمان چون مسیر پایین بسته است هیچ طرح تداخلی نداریم. به عبارتی به محض اینکه فهمیدیم فوتون در مسیر بالایی جایگزیده است طرح تداخلی هم از بین رفت! به عبارت دیگر ما نمیتوانیم درباره ی مسیری که فوتون طی کرده است اطلاعاتی کسب کنیم بدون اینکه طرح تداخلی را برهم بزنیم و نتیجتا حالت فوتون را تغییر دهیم. این ما را به اصل بعدی مکانیک کوانتومی میرساند:

اصل مکملیت: اطلاع کامل از مسیر، با حضور طرح تداخلی سازگار نیست.

به عبارتی اطلاع کامل از مسیر مکمل تداخل است. هرچقدر یکی بیشتر باشد دیگری کمتر است. یعنی مکملیت یک حالت صفر و یک یا بله/خیر نیست. بلکه هرچه اطلاع ما از مسیر ذره افزایش یابد، به همان میزان طرح تداخلی از بین میرود و برعکس. بنابراین جایگزیدگی کامل (رفتار ذره ای) و تداخل کامل (رفتار موجی یا برهمنهی) دو حالت حدی هستند و حالتهای پیوسته میانی هم امکان دارند. اصل مکملیت اولین بار در سال ۱۹۲۷ توسط بوهر بیان شد و تلاشی بود برای بیان عمومی تر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ.

۳.۳ حالتها به عنوان بردار

تا قبل از مکانیک کوانتومی، مردم فکر میکردند که اصول مکانیک نیوتونی مبنایی برای توصیف تمامی پدیده های فیزیک است و تمام کاری که یک فیزیکدان باید انجام دهد این است که این اصول را به درستی توسعه دهد و به کار بگیرد. اما باید به این نکته توجه داشت که هیچ دلیل منطقی وجود ندارد که اصول مکانیک کلاسیک در بیرون از حیطه ای که بصورت آزمایشگاهی تایید شده اند معتبر باشند و در آزمایشهای قبلی دیدیم که عدول از اصول مکانیک کلاسیک اجتناب ناپذیر است. این عدول از مکانیک کلاسیک خود را در قالب اصول موضوعه ی جدید، ریاضیات جدید و قوانین محاسباتی جدید نشان میدهد. در مکانیک کوانتومی هم تفاوت در اصول فیزیکی، باعث نیاز به وجود ریاضیاتی متفاوت نسبت به آنچه در مکانیک کلاسیک داشتیم میشود. حالت سامانه و متغیرهای دینامیکی باید با متغیرهای ریاضیاتی متفاوت از آنچه در فیزیک کلاسیک داشتیم توصیف شود. پس با ترکیب اصول موضوعه ی جدید، و ریاضیات جدید مناسب با آن، نظریه ای جدید و کامل که قابلیت محاسبه و راستی آزمایی دارد بدست می آید.

ریاضیات مناسب را میتوانیم با توجه به مهمترین اصل مکانیک کوانتومی یعنی اصل برهمنهی بدست آوریم. اصل برهمنهی یک نوع فرآیند جمع پذیری است و به یک معنا میگوید دو حالت میتوانند با هم جمع شوند و حالت جدیدی را بدست دهند. بنابراین حالت هر سامانه باید با کمیتی ریاضیاتی مرتبط باشد که از نوعی باشد که وقتی باهم جمع میشوند کمیتی از همان نوع را بدست دهد و به عنوان نتیجه بتواند مقادیر مختلفی را اتخاذ کند. مهمترین و واضح ترین نوع چنین کمیتی **بردار** است.

بردارهای عادی که در فضای با ابعاد محدود (سه بعدی) به کار میبریم به اندازه ی کافی برای بیان ویژگیهای دینامیکی حالتهای کوانتومی عمومیت ندارند. از طرفی اعداد حاصل از ضرب داخلی بردارهای عادی اعداد حقیقی هستند، یا به عبارتی بردارها مولفه های حقیقی دارند، که باز با توجه به ذات مختلط دامنه ی احتمال، برای مقصود ما کافی نیست. بنابراین مجموعه اعدا را به اعدا مختلط گسترش میدهیم.

کت[۱۴]: مطلوب است برای بردارهایی که بیانگر ویژگیهای حالتهای کوانتومی یک سامانه هستند یک نام قرار دهیم. به این بردارها از این به بعد بردار کت یا بصورت خلاصه کت میگوییم و آنها را با نماد $|\ \rangle$ نشان میدهیم.

بردارهای کت میتوانند در اعداد مختلط ضرب شوند یا با هم جمع شوند تا کت جدیدی را بسازند. مثلا

$$|\psi\rangle = a\,|\alpha\rangle + b\,|\beta\rangle + c\,|\phi\rangle \ , \tag{۲۱.۳}$$

که ضرایب a و b و c اعدادی مختلط هستند. در اینجا میگوییم حالت ψ به صورت **ترکیب خطی** از حالتهای α و β و ϕ نوشته شده است یا به عبارتی به آنها **وابسته ی خطی** است. به همین ترتیب مجموعه ای از حالتها را **مستقل خطی** گوییم اگر هیچکدام از آنها وابسته ی خطی بقیه نباشد. یعنی نتوان هیچ کدام را بصورت ترکیب خطی از بقیه نوشت. بنابراین اگر یک حالت کوانتومی از برهمنهی چند حالت کوانتومی دست آید، کت حالت آن حالت هم از برهمنهی کتهای آن حالتهای کوانتومی بدست می آید که بصورت ترکیب خطی نوشته میشود، مانند آزمایش دوشکافی:

$$|\phi\rangle_{12} = |\phi_1 + \phi_2\rangle = |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle \ , \tag{۲۲.۳}$$

[۱۴] ket

یا مانند آزمایش ماخ-زندر:

$$|\psi\rangle = c_1\,|\psi_1\rangle + c_2\,|\psi_2\rangle \ . \qquad (۲۳.۳)$$

اگر یک کت $|\psi\rangle$ را در یک عدد مختلط c ضرب کنیم به کت $c\,|\psi\rangle$ میرسیم. از آنجا که اطلاعات دینامیکی درون کت تغییر نکرده است، پس ضرب کت در یک عدد ما را به کت جدیدی نمیرساند و به عبارتی همچنان بیانگر همان سامانه است.

تا بدینجا ما حالتهای کوانتومی را با بردارهایی به نام کت نمایش دادیم. مجموعه ی این بردارها تشکیل یک فضای ریاضیاتی به نام فضای برداری میدهند که در ادامه آنرا تعریف میکنیم:

فضای برداری: به مجموعه ای از بردارها که جمع هر دو بردار دلخواه از آن مجموعه، عضو آن مجموعه باشد فضای برداری گوییم و دارای ویژگی های زیر است:

۱. دارای بردار صفر است یعنی بردار $|0\rangle$ عضوی از آن مجموعه است به قسمی که برای هر بردار v از آن مجموعه

$$|0\rangle + |v\rangle = |v\rangle \ . \qquad (۲۴.۳)$$

۲. قرینه ی هر بردار $|v\rangle$ عضوی از مجموعه است به قسمی که

$$|v\rangle + |-v\rangle = 0 \ . \qquad (۲۵.۳)$$

۳. همه ی اعضا خاصیت توزیع پذیری جمع دارند یعنی برای هر سه بردار دلخواه $|u\rangle$ و $|v\rangle$ و $|w\rangle$ متعل به فضای برداری

$$(|v\rangle + |u\rangle) + |w\rangle = |v\rangle + (|u\rangle + |w\rangle) \ . \qquad (۲۶.۳)$$

۴. دارای خاصیت جابجایی هستند یعنی برای هر دو بردار دلخواه $|u\rangle$ و $|v\rangle$ از فضای برداری

$$|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle \ . \qquad (۲۷.۳)$$

۵. برای هر دو عدد a و b و هر بردار $|v\rangle$ از فضای برداری

$$(ab)\,|v\rangle = a(b\,|v\rangle) \ . \qquad (۲۸.۳)$$

۶. برای هر بردار $|v\rangle$ از فضای برداری

$$1\,|v\rangle = |v\rangle \ . \qquad (۲۹.۳)$$

۷. برای هر عدد a و هر دو بردار دلخواه $|u\rangle$ و $|v\rangle$ از فضای برداری

$$a(|u\rangle + |v\rangle) = a\,|u\rangle + a\,|v\rangle \ . \qquad (۳۰.۳)$$

۸. برای هر دو عدد دلخواه a و b و هر بردار دلخواه $|v\rangle$ از فضای برداری

$$(a+b)\,|v\rangle = a\,|v\rangle + b\,|v\rangle \ . \qquad (۳۱.۳)$$

برا[۱۵]: میتوان به هر کت $|\psi\rangle$ یک بردار دوگان به نام برای ψ با نماد $\langle\psi|$ نسبت داد که عملا حاوی همان اطلاعات کت ψ است. هرگاه بخواهیم دو کت را در هم ضرب داخلی کنیم، باید یکی را بصورت کت و دیگری را بصورت برا بنویسیم یعنی

$$\langle\phi|\,.\,|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \ . \qquad (۳۲.۳)$$

ضرب داخلی $\langle\phi|\psi\rangle$ یک عدد مختلط است.

مانند کتها، براها هم تشکیل یک فضای برداری میدهند که فضای دوگان نام دارد. ضرب داخلی دو کت در هم، یا همان براکت، دارای ویژگی های زیر است:

خواص ضرب داخلی:

[۱۵] bra

۱. ضرب داخلی، عددی مختلط است.

۲. ضرب داخلی متقارن است یعنی

$$\Big(\langle\phi|\psi\rangle \Big)^* = \langle\psi|\phi\rangle \ . \tag{۳۳.۳}$$

۳. ضرب داخلی نسبت به کت خطی است یعنی

$$\langle\phi|a\psi_1 + b\psi_2\rangle = a\,\langle\phi|\psi_1\rangle + b\,\langle\phi|\psi_2\rangle \ , \tag{۳۴.۳}$$

و نسبت به برا پادخطی است یعنی

$$\langle a\phi_1 + b\phi_2|\psi\rangle = a^*\,\langle\phi_1|\psi\rangle + b^*\,\langle\phi_2|\psi\rangle \ . \tag{۳۵.۳}$$

۴. ضرب داخلی هر کت در خودش مثبت معین[۱۶] است یعنی

$$\begin{cases} \langle\psi|\psi\rangle > 0 & \text{اگر} \quad |\psi\rangle \neq 0 \ , \\ \langle\psi|\psi\rangle = 0 & \text{اگر} \quad |\psi\rangle = 0 \ . \end{cases} \tag{۳۶.۳}$$

با توجه به روابطی که بین هر دو بردار یک فضای برداری تعریف میکنیم، میتوانیم انواع فضای برداری را بسازیم. در مکانیک کوانتوم، کتها و براها متعلق به فضایی بنام فضای هیلبرت[۱۷] هستند که بصورت زیر تعریف میشود:

فضای هیلبرت: یک فضای برداری حقیقی یا مختلط که بین بردارهایش ضرب داخلی تعریف شده باشد که دارای خواص بالا باشد. بنابراین کتهای حالت اعضای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ هستند. همچنین براها اعضای فضای هیلبرت دوگان $\mathcal{H}^*$ هستند.

با توجه به ضرب داخلی بین دو کت میتوان مشخص کرد که این دو کت مستقل خطی هستند یا خیر.

استقلال خطی: دو کت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ از هم مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle = 0 \ . \tag{۳۷.۳}$$

به کمک تعریف ضرب داخلی میتوانیم بزرگی یک بردار کت را بصورت زیر بنویسیم:

$$||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \ . \tag{۳۸.۳}$$

فضای هیلبرت یک سامانه ی کوانتومی ممکن است دارای بعد محدود (۲و ۳و ...) یا بینهایت بعدی باشد. همچنین ممکن است ابعاد آن شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد. بیشینه ی تعداد کتهایی که در یک فضای هیلبرت تشکیل یک مجموعه ی مستقل خطی میدهند (یا به عبارتی دو به دو برهم عمودند) را **بعد فضای هیلبرت** گوییم. دقیقا مانند فضای سه بعدی موقعیت که حداکثر سه بردار میتوان یافت (مثل $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$) که دو به دو بر هم عمودند و هر بردار چهارمی بر روی حداقل یکی از این بردارها تصویر دارد (یا به عبارتی وابسته خطی حداقل یکی از آنهاست).

بیان دیگری از استقلال خطی اینگونه است که مجموعه ی N بردار $|\phi_1\rangle$، $|\phi_2\rangle$، ... ، $|\phi_N\rangle$ را مستقل خطی گوییم اگر و تنها اگر حل معادله ی $\sum_{i=1}^{N} a_i\,|\phi_i\rangle = 0$ برابر $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$ باشد. بنابراین به بیشینه ی اعضای مستقل خطی یعنی $N_{\max}$ بعد فضا گوییم.

بنابراین اصل اول مکانیک کوانتومی را بصورت زیر بیان میکنیم:

اصل بردار حالت: حالت هر سامانه کوانتومی، مثلا ψ با یک بردار کت $|\psi\rangle$ در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معلوم میشود و تمام اطلاعات دینامیکی مربوط به آن سامانه درون کت آن ذخیره شده و قابل استخراج است.

اصل بردار حالت، بیان دیگری از اصل برهمنهی است. چراکه طبق اصل برهمنهی اگر سامانه بتواند در چند حالت کوانتومی باشد، میتواند در ترکیب خطی آنها نیز باشد. از طرفی طبق اصل بردار حالت، بردار کت سامانه عضوی از فضای هیلبرت است و بنابراین طبق ویژگی هر فضای برداری، ترکیب خطی هر چند کت دلخواه از فضا هم عضوی از آن فضا است که معادل با بیان اصل برهمنهی است.

---

[۱۶] positive definite

[۱۷] Hilbert space

۱.۳.۳ کتهای پایه

همانگونه که در فضای سه بعدی موقعیت میتوان هر بردار دلخواهی را بر حسب مجموعه بردارهای یکه مستقل خطی $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ نوشت، در یک فضای هیلبرت N بعدی هم هر کت دلخواه $|\psi\rangle$ را میتوان بر حسب ترکیب خطی از مجموعه ی مستقل خطی $\{|\phi_i\rangle\}$ نوشت، یعنی

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \, |\phi_i\rangle \ , \tag{۳۹.۳}$$

که به آن **اصل بسط**[۱۸] گویند. به مجموعه بردارهای مستقل خطی $\{|\phi_i\rangle\}$ که هر بردار دلخواهی را میتوانیم بر حسب آنها بسط دهیم پایه های فضا یا **کتهای پایه**[۱۹] گوییم. واضح است که این مجموعه یکتا نیست، همانگونه که مجموعه ی $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ تنها مجموعه بردارهای دو به دو عمود برهم برای فضای سه بعدی موقعیت نیستند. عملا تعداد این مجموعه ها بینهایت است. با توجه به توضیحات بالا، پایه های فضا دارای دو ویژگی زیر هستند:

۱. دو به دو برهم عمودند یعنی

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = 0 \quad \text{برای} \quad i \neq j \ , \tag{۴۰.۳}$$

که به آن شرط تعامد[۲۰] گویند.

۲. بزرگی همه ی آنها یک است یعنی

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = 1 \quad \text{برای} \quad i = j \ , \tag{۴۱.۳}$$

که به آن شرط بهنجارش[۲۱] گویند.

مجموعه ی این دو شرط را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij} \ , \tag{۴۲.۳}$$

که به شرط راست هنجاری[۲۲] معروف است. δ_{ij} دلتای کرونکر است و مطابق زیر تعریف میشود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \ . \end{cases} \tag{۴۳.۳}$$

سوال مهمی که باید پاسخ دهیم این است که در بسط (۳۹.۳)، ضرایب بسط c_i چه تعبیر فیزیکی دارند. با ضرب $\langle\phi_j|$ در $|\psi\rangle$ داریم:

$$\langle\phi_j|\psi\rangle = \langle\phi_j| \sum_{i=1}^{N} c_i \, |\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \langle\phi_j|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{ij} = c_j \ . \tag{۴۴.۳}$$

بنابراین

$$c_i = \langle\phi_i|\psi\rangle \ , \tag{۴۵.۳}$$

که بدین معناست که ضرایب بسط c_i دامنه ی احتمال این هستند که از اندازه گیری روی حالت $|\psi\rangle$ سامانه را در حالت $|\phi_i\rangle$ بیابیم. یعنی

$$\mathrm{Pr}(\psi \to \phi_i) = |c_i|^2 = c_i^* c_i \ . \tag{۴۶.۳}$$

[۱۸] expansion principle
[۱۹] base kets
[۲۰] orthogonality
[۲۱] normalization
[۲۲] orthonormality

از آنجا که ضرب یک کت در یک عدد اطلاعات دینامیکی درون آنرا تغییر نمیدهد، و با توجه به اینکه مجموع همه ی احتمالها برابر یک است، تمامی کتها را مانند کتهای پایه به یک بهنجار میکنیم. در این باره بعدا بیشتر صحبت خواهیم کرد.

نامساوی شوارز[۲۳]: برای هر دو کت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ میتوانیم نشان دهیم:

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \ . \tag{۴۷.۳}$$

نامساوی مثلثی: برای هر دو کت $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ میتوانیم نشان دهیم:

$$\sqrt{\langle\psi+\phi|\psi+\phi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \ . \tag{۴۸.۳}$$

مثال ۱.۳. یک فضای هیلبرت دو بعدی را در نظر بگیرید که کتهای $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ پایه های آن فضا باشند. حالتهای $|\psi\rangle$ و $|\chi\rangle$ بر حسب این پایه ها به شکل زیر نوشته میشوند:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= 3i\,|\phi_1\rangle - 7i\,|\phi_2\rangle \ , \\ |\chi\rangle &= -\,|\phi_1\rangle + 2i\,|\phi_2\rangle \ . \end{aligned}$$

عبارتهای (الف) $\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle$، (ب) $\langle\psi|\chi\rangle$ و $\langle\chi|\psi\rangle$ را محاسبه کنید. (پ) نشان دهید $|\psi\rangle$ و $|\chi\rangle$ نامساوی شوارز و مثلثی را ارضا میکنند. (ت) کتهای $|\psi\rangle$ و $|\chi\rangle$ را بهنجار کنید.

حل: ... □

مثال ۲.۳. در یک فضای هیلبرت، پایه های فضا کتهای $|\phi_1\rangle$، ... ، $|\phi_4\rangle$ هستند. کتهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= 2i\,|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle - a\,|\phi_3\rangle + 4\,|\phi_4\rangle \ , \\ |\psi_2\rangle &= 3\,|\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5\,|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle \ . \end{aligned}$$

(الف) ثابت a را به قسمی بدست آورید که این دو کت بر هم عمود باشند.

(ب) این دو کت را بهنجار کنید.

حل: ... □

۴.۳ عملگر

تا به اینجا دو موجود ریاضی برا و کت، که بردارهایی در فضای هیلبرت هستند ، را برای توصیف سامانه های کوانتومی معرفی کردیم. در آزمایش دو شکافی و ماخ-زندر و هر آزمایش دیگری میبینیم که بخاطر مشاهده، حالت سامانه تغییر میکند و بردار حالت آن از یک کت به کت دیگری تبدیل میشود. ابزار ریاضی که یک کت را به کت دیگری تبدیل میکند عملگر مینامیم. به بیان ریاضی:

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = |\phi\rangle \ , \tag{۴۹.۳}$$

که بدین معناست که عملگر $\hat{A}$ با اثر روی $|\psi\rangle$، آنرا به $|\phi\rangle$ تبدیل میکند. به عبارت دقیقتر، عملگر یک **نگاشت**[۲۴] روی اعضای یک فضای هیلبرت است که یک عضو آن را (در اینجا $|\psi\rangle$) به عضو دیگر (در اینجا $|\phi\rangle$) مینگارد. عملگرها را با یک ^ در بالای نماد آن نشان میدهیم تا از اعداد عادی تمیز داده شوند.

در مکانیک کوانتومی، بخاطر اصل برهمنهی، که یک کت میتواند **ترکیب خطی** از کتهای دیگر باشد، برای حفظ این ویژگی، با عملگرهای خطی سروکار داریم یعنی:

$$\hat{A}\big(a\,|\psi\rangle + b\,|\phi\rangle\big) = a\hat{A}\,|\psi\rangle + b\hat{A}\,|\phi\rangle \ . \tag{۵۰.۳}$$

[۲۳] Schwarz inequality
[۲۴] mapping

۱.۴.۳ همیوغ هرمیتی

عبارت $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle$ یک براکت و نتیجتا عددی مختلط است. چراکه $\hat{A}\,|\phi\rangle$ کت $|\phi\rangle$ را به کتی دیگر، مثلا $|\chi\rangle$، مینگارد و بنابراین $\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle$ یک براکت و عددی مختلط است. برای بدست آوردن مزدوج مختلط این براکت، باید جای برا و کت را عوض کنیم. به همین ترتیب عملگر $\hat{A}$ هم لزوما بدون تغییر نمیماند و به عملگری دیگر تبدیل میشود که آن را با نماد $\hat{A}^\dagger$ نشان داده و به آن همیوغ هرمیتی[۲۵] عملگر $\hat{A}$ گوییم یعنی:

$$\Big(\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle\Big)^* = \langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle \ . \tag{۵۱.۳}$$

در حالت کلی یک عملگر با همیوغ هرمیتی اش برابر نیست یعنی $\hat{A} \neq \hat{A}^\dagger$. اما اگر عملگری با همیوغ هرمیتی اش برابر باشد، یعنی $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$، به آن عملگر **هرمیتی** گوییم.

همچنین در حالت کلی ضرب دو عملگر جابجاپذیر نیست: $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$، یعنی:

$$\hat{A}\hat{B}\,|\psi\rangle = \hat{A}\Big(\hat{B}\,|\psi\rangle\Big) = \hat{A}\,|\phi\rangle = |\chi\rangle \ .$$

درحالیکه

$$\hat{B}\hat{A}\,|\psi\rangle = \hat{B}\Big(\hat{A}\,|\psi\rangle\Big) = \hat{B}\,|\phi'\rangle = |\chi'\rangle \ .$$

در حالت کلی $|\chi\rangle \neq |\chi'\rangle$ و بنابراین در حالت کلی $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$. اگر دو عملگر با هم جابجا شوند بدین معناست که $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. چون چنین ترکیبهایی زیاد ظاهر میشوند، جابجایی[۲۶] دو عملگر را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$\Big[\hat{A},\hat{B}\Big] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \ , \tag{۵۲.۳}$$

و بنابرین اگر دو عملگر باهم جابجا شوند $\Big[\hat{A},\hat{B}\Big] = 0$، و اگر باهم جابجا نشوند $\Big[\hat{A},\hat{B}\Big] \neq 0$.

همیوغ هرمیتی دارای ویژگیهای زیر است:

$$\Big(\hat{A}^\dagger\Big)^\dagger = \hat{A} \ , \quad \Big(\hat{A}+\hat{B}\Big)^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger \ , \quad \Big(\hat{A}\hat{B}\Big)^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \ ,$$
$$\Big(c\hat{A}\Big)^\dagger = c^*\hat{A}^\dagger \ \text{که}\ c \in \mathbb{C} \ , \quad \Big(\hat{A}\,|\psi\rangle\Big)^\dagger = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger \ . \tag{۵۳.۳}$$

تمرین ۳.۳. ویژگی های بالا برای همیوغ هرمیتی را اثبات کنید. □

۲.۴.۳ عملگر تصویر

ترکیبهای $\langle\phi|\,|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle\,|\psi\rangle$ برای اعضای یک فضای هیلبرت ممنوع است[۲۷]. اما همانگونه که قبلا گفتیم ترکیب $\langle\psi|\phi\rangle$ ضرب داخلی دو بردار و عددی مختلط است. آخرین ترکیب، عبارتهایی مانند $|\psi\rangle\langle\phi|$ هستند. اینگونه ترکیبها ضرب خارجی دو کت بوده و بنابراین مجاز هستند. بلحاظ ریاضیاتی این ترکیبها عملگر هستند چراکه

$$\Big(|\psi\rangle\langle\phi|\Big)\,|\chi\rangle = |\psi\rangle\,\langle\phi|\chi\rangle = \Big(\langle\phi|\chi\rangle\Big)\,|\psi\rangle \ . \tag{۵۴.۳}$$

این بدین معناست که ترکیب $|\psi\rangle\langle\phi|$ حالت $|\chi\rangle$ را به حالت $|\psi\rangle$ نگاشته است و بنابراین عملگر است. عملگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ که اگر روی هر حالتی اثر کند، آنرا به حالت $|\psi\rangle$ مینگارد را **عملگر تصویر**[۲۸] گوییم:

$$\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \ . \tag{۵۵.۳}$$

واضح است که عملگر تصویر هرمیتی است.

---

[۲۵] Hermitian conjugate

[۲۶] commutator

[۲۷] البته اگر کتها یا براها متعلق به دو فضای هیلبرت متفاوت باشند، این ترکیبها ممنوع نبوده و به آنها ضرب تانسوری گوییم که در فصلهای بعد به آنها اشاره خواهیم کرد.

[۲۸] projection operator

۳.۴.۳ شرط تمامیت

گفتیم که بعد یک فضای هیلبرت برابر بیشینه ی تعداد پایه های فضا یا کتهایی است که دو بدو بر هم عمودند. حال سوالی که مطرح میشود این است که چگونه بفهمیم تمام پایه های فضا را یافته ایم و هیچ کت دیگری وجود ندارد که بر همه ی آنها عمود باشد؟ برای پاسخ به این سوال کت دلخواه $|\psi\rangle$ را بر حسب یک مجموعه دلخواه از پایه های فضا، مثلا $\{|\phi_i\rangle\}$ بسط میدهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle\phi_i|\psi\rangle\,|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\,\langle\phi_i|\psi\rangle = \Big(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\Big)\,|\psi\rangle\ . \tag{۵۶.۳}$$

برای اینکه تساوی برقرار باشد، لازم است که عبارت داخل پرانتز برابر عملگر واحد باشد، یعنی:

$$\sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \sum_{i=1}^{N} \hat{P}_{\phi_i} = \mathbb{1}\ . \tag{۵۷.۳}$$

به این رابطه **شرط تمامیت** گویند و بدین معناست که زمانی که این شرط ارضا شد (سمت راست رابطه برابر عملگر واحد شد) تمام پایه های فضا (یعنی Nتا) را یافته ایم و بعد فضا برابر N است. از آنجا که این رابطه برابر عملگر واحد است، میتوان آن را در هر قسمتی از محاسبات تزریق کرد بدون اینکه در نتیجه تاثیری بگذارد. از این ترفند در آینده بسیار استفاده خواهیم کرد.

به عنوان یک کاربرد از رابطه تمامیت، معادله ی (۴۶.۳) را در نظر بگیرید. از آنجا که مجموع همه ی احتمالها باید برابر یک باشد داریم:

$$\sum_{i=1}^{N} \Pr(\psi \to \phi_i) = 1 \tag{۵۸.۳}$$

با جایگذاری از معادله ی (۴۶.۳) و (۴۵.۳) در رابطه بالا داریم:

$$1 = \sum_{i=1}^{N} c_i^* c_i = \sum_{i=1}^{N} \langle\psi|\phi_i\rangle\,\langle\phi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\,\Big(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\Big)\,|\psi\rangle\ . \tag{۵۹.۳}$$

از شرط تمامیت (۵۷.۳) عبارت داخل پرانتز برابر عملگر واحد است و بنابراین

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1\ , \tag{۶۰.۳}$$

که بدین معناست که علاوه بر پایه های فضا، همه ی کتها را هم باید به یک بهنجار کنیم.

۴.۴.۳ عملگر یکانی

عملگر $\hat{U}$ را در نظر بگیرید به قسمی که

$$\hat{U}\,|\psi\rangle = |\chi\rangle\ , \tag{۶۱.۳}$$

که بدین معناست که با تاثیر $\hat{U}$ بر روی حالت $|\psi\rangle$ به حالت $|\chi\rangle$ میرسیم. اگر حالت $|\psi\rangle$ بهنجار به یک باشد و با توجه به (۶۰.۳) بخواهیم حالت $|\chi\rangle$ هم همچنان بهنجار به یک باقی بماند داریم:

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = 1\ , \tag{۶۲.۳}$$

که بدین معناست که

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}\ . \tag{۶۳.۳}$$

به چنین عملگرهایی که در رابطه فوق صدق میکنند عملگر یکانی[۲۹] گویند. از رابطه بالا واضح است که برای عملگرهای یکانی داریم

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}\ . \tag{۶۴.۳}$$

[۲۹] unitary operator

عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی از اهمیت بالایی برخوردارند چراکه با توجه به رابطه ی (۶۲.۳) بهنجارش حالتها را قبل و بعد از تاثیر عملگر حفظ میکنند. عملگرهایی که تحول سامانه را رقم میزنند، مانند انتقال، دوران و تحول زمانی باید یکانی باشند. بدین معنا که بهنجارش سامانه بعد از انتقال، دوران یا با گذشت زمان نباید تغییر کند که نتیجه ی قانون بقای احتمال است.

تمرین ۴.۳. ثابت کنید هر تبدیل یکانی $\hat{U}$ ضرب داخلی $\langle\psi|\chi\rangle$ را ناوردا نگه میدارد. □

حال براکت $\langle\psi|\hat{A}|\chi\rangle$ را در نظر بگیرید. فرض کنید عملگر یکانی $\hat{U}$ حالتهای $\langle\psi|$ و $\langle\phi|$ را بصورت زیر تبدیل کند:

$$\hat{U}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle\ ,\quad \hat{U}\,|\chi\rangle = |\chi'\rangle\ . \tag{۶۵.۳}$$

که خواهیم داشت:

$$|\psi\rangle = \hat{U}^\dagger\,|\psi'\rangle\ ,\quad |\chi\rangle = \hat{U}^\dagger\,|\chi'\rangle\ . \tag{۶۶.۳}$$

بنابراین براکت $\langle\psi|\hat{A}|\chi\rangle$ را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$\langle\psi|\hat{A}|\chi\rangle = \langle\psi'|\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger|\chi'\rangle = \langle\psi'|\hat{A}'|\chi'\rangle\ . \tag{۶۷.۳}$$

با مقایسه تساوی دوم و سوم در عبارت بالا به این نتیجه میرسیم که یک عملگر تحت تبدیل یکانی به صورت زیر تبدیل میشود:

$$\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}\ . \tag{۶۸.۳}$$

با توجه به روابط (۶۵.۳) تبدیلهای یکانی دارای ویژگی های زیر هستند:

$$\left[\hat{A}',\hat{B}'\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\ ,\quad \langle\psi'|\chi'\rangle = \langle\psi|\chi\rangle\ ,\quad \hat{A}'^\dagger = \hat{A}^\dagger\ ,\quad \hat{A}'^n = \hat{A}^n\ . \tag{۶۹.۳}$$

تمرین ۵.۳. ثابت کنید اگر معادله ویژه مقداری $\hat{A}\,|\phi_n\rangle = a_n\,|\phi_n\rangle$ برای عملگر $\hat{A}$ برقرار باشد، همین معادله با همین ویژه مقدار برای تبدیل یکانی عملگر با تبدیل یکانی ویژه کتها وجود دارد، یعنی: $\hat{A}'\,|\phi'_n\rangle = a_n\,|\phi'_n\rangle$. □

تبدیل یکانی بینهایت کوچک: یک تبدیل بینهایت کوچک، تبدیلی است که به مقداری بسیار کمی از عملگر واحد متفاوت است، یعنی:

$$\hat{U}(\varepsilon) = \mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G}\ , \tag{۷۰.۳}$$

که پارامتر حقیقی $\varepsilon \ll 1$ و عملگر $\hat{G}$ را مولد[۳۰] تبدیل $\hat{U}$ گوییم. حال اگر قرار باشد $\hat{U}(\varepsilon)$ یکانی باشد داریم:

$$\hat{U}(\varepsilon)\hat{U}^\dagger(\varepsilon) = \mathbb{1}\ , \tag{۷۱.۳}$$

که با توجه به (۷۰.۳) خواهیم داشت:

$$(\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G})(\mathbb{1} - i\varepsilon\hat{G}^\dagger) = \mathbb{1} + i\varepsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) - \varepsilon^2\hat{G}\hat{G} = \mathbb{1}\ . \tag{۷۲.۳}$$

چون بسط تبدیل یکانی $\hat{U}$ را تا توان اول ε نوشته ایم، در عبارت بالا از توان ε^2 صرف نظر میکنیم. بنابراین برای یکانی بودن $\hat{U}$ باید داشته باشیم $\hat{G} = \hat{G}^\dagger$ که بدین معناست که مولد عملگر یکانی هرمیتی است. حال اثر $\hat{U})(\varepsilon)$ روی حالت دلخواه $|\psi\rangle$ داریم

$$|\psi'\rangle = \hat{U}(\varepsilon)\,|\psi\rangle = (\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G})\,|\psi\rangle = |\psi\rangle + i\varepsilon\hat{G}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle + \delta\,|\psi\rangle\ , \tag{۷۳.۳}$$

و بنابراین

$$\delta\,|\psi\rangle = i\varepsilon\hat{G}\,|\psi\rangle\ . \tag{۷۴.۳}$$

[۳۰] generator

همچنین به طریق مشابه برای عملگر $\hat{A}$ داریم:

$$\hat{A}' = \hat{U}(\varepsilon)\hat{A}\hat{U}^{\dagger}(\varepsilon) = (\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G})\hat{A}(\mathbb{1} - i\varepsilon\hat{G}) = \hat{A} + i\varepsilon\Big[\hat{G}, \hat{A}\Big] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ . \tag{۷۵.۳}$$

بنابراین تگر $\Big[\hat{G}, \hat{A}\Big] = 0$ باشد، یعنی اگر مولد $\hat{U}$ با عملگر $\hat{A}$ جابجا شود، $\hat{A}$ تحت تبدیل $\hat{U}$ ناوردا میماند. به عبارتی

$$\Big[\hat{G}, \hat{A}\Big] = 0 \Rightarrow \hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{\dagger} = \hat{A} \ . \tag{۷۶.۳}$$

تبدیل یکانی محدود: فرض کنید تبدیل $\hat{U}(\alpha)$ محدود باشد، بدین معنا که α لزوما عددی بسیار کوچک نبوده و مقداری محدود و متناهی دارد که حاصل اثر دفعات بسیار زیاد Nبار تبدیل بی نهایت کوچک $\hat{U}(\varepsilon)$ است به قسمی که $\varepsilon = \alpha/N$، که برای $N \to \infty$ داریم $\varepsilon \to 0$. بنابراین

$$\hat{U}(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \Big(\mathbb{1} + i\frac{\alpha}{N}\hat{G}\Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(\mathbb{1} + i\frac{\alpha}{N}\hat{G}\Big)^N = e^{i\alpha\hat{G}} \ . \tag{۷۷.۳}$$

پس هر تبدیل یکانی محدود را میتوان بصورت

$$\hat{U}(\alpha) = e^{i\alpha\hat{G}} \tag{۷۸.۳}$$

نوشت که $\hat{G}$ مولد تبدیل محدود $\hat{U}$ به اندازه ی پارامتر α است.

تمرین ۶.۳. ثابت کنید تبدیل (۷۸.۳) یکانی است اگر و تنها اگر مولد آن هرمیتی باشد.

۵.۳ ویژه مقادیر و ویژه کتها

فرض کنید کمیت A (مثلا انرژی یا تکانه یا ...) حالت سامانه ی کوانتومی را مشخص میکند. البته معمولا برای تعیین حالت سامانه به بیش از یک کمیت نیاز است، ولی برای سادگی فرض میکنیم حالت سامانه با یک کمیت معین میشود. مقادیری که کمیت A میتواند داشته باشد که نتیجه ی اندازه گیری آن است را در مکانیک کوانتومی **ویژه مقادیر**[۳۱] آن گفته و مجموعه ی آنها را طیف ویژه مقادیر A میگوییم. در مکانیک کلاسیک کمیتها مقادیر پیوسته ای اخذ میکنند اما در مکانیک کوانتومی ویژه مقادیر میتوانند هم طیف پیوسته و هم طیف گسسته داشته باشند. فعلا در ابتدای کار و برای سادگی فرض میکنیم طیف ویژه مقادیر کمیت A گسسته است. بعدا طیفهای پیوسته را هم بررسی میکنیم.

اگر حالت سامانه وقتی کمیت A دارای ویژه مقدار a_i است را با $|\phi_i\rangle$ نشان دهیم، این $|\phi_i\rangle$ ها را **ویژه حالت** یا **ویژه کت**[۳۲] کمیت A مینامیم. این ویژه حالتها بهنجار هستند یعنی $\langle\phi_i|\phi_i\rangle = 1$. اگر سامانه قبل از اندازه گیری کمیت A (که از این به بعد به آن مشاهده پذیر A هم میگوییم) در حالتی مانند $|\psi\rangle$ باشد، اندازه گیری A منجر به برون داد یکی از ویژه مقادیر a_i خواهد شد واین یعنی حالت سامانه از $|\psi\rangle$ در قبل از اندازه گیری به $|\phi_i\rangle$ پس از اندازه گیری تبدیل میشود که موضوع اصل دیگر مکانیک کوانتومی است:

اصل اندازه گیری: نتیجه ی اندازه گیری مشاهده پذیر A روی سامانه ی کوانتومی $|\psi\rangle$، یکی از ویژه مقادیر آن a_i است و سامانه بلافاصله پس از اندازه گیری، در حالت $|\phi_i\rangle$ قرار میگیرد.

پس حالت $|\psi\rangle$ میتواند هریک از حالتهای $|\phi_i\rangle$ را اتخاذ کند. بنابراین بر اساس اصل برهمنهی، که اگر سامانه بتواند چند حالت را انتخاب کند در ترکیب خطی از آنها نیز میتواند باشد، نتیجه میگیریم حالت $|\psi\rangle$ را میتوانیم بر حسب ویژه مقادیر A، یعنی $|\phi_i\rangle$ ها، بنویسیم، یعنی:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \, |\phi_i\rangle \ . \tag{۷۹.۳}$$

[۳۱] eigenvalues
[۳۲] eigenket

به عبارتی کت سامانه که ابتدا و قبل از اندازه گیری کمیت A، ترکیب خطی از ویژه کتهای آن بود، بعد از اندازه گیری در یکی از ویژه کتهای A، مثلا $|\phi_i\rangle$، می افتد. به این پدیده **فروکاهش تابع موج**[۳۳] میگویند.

طبق (۴۵.۳) ضرایب بسط c_i در رابطه ی $c_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$ صدق میکنند که عددی مختلط است. از نتایج تداخلی آزمایش دوشکافی (مثلا رابطه (۱۲.۳)) و آزمایش ماخ-زندر واضح است که باید این براکتها را به عنوان دامنه های احتمال در نظر بگیریم تا بتوانیم طرح های تداخلی را توجیه کنیم. بنابراین و با توجه به توضیحات بالا تعبیر فیزیکی آنها به عنوان یکی دیگر از اصول مکانیک کوانتومی بیان میشود:

اصل الگوریتم آماری: در بسط $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |\phi_i\rangle$ که $|\phi_i\rangle$ها ویژه کتهای کمیت A با ویژه مقادیر a_i هستند، ضریب بسط $c_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$ دامنه ی احتمال این است که از اندازه گیری کمیت A روی سامانه ی ψ، مقدار a_i بدست آید:

$$\Pr(\psi \to \phi_i) = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 \ , \tag{۸۰.۳}$$

و این یعنی سامانه پس از اندازه گیری در ویژه حالت $|\phi_i\rangle$ است.

بنابراین نتیجه میگیریم که با اندازه گیری کمیت A، حالت سامانه از $|\psi\rangle$ به $|\phi_i\rangle$ تغییر کرده است. پس بنا بر تعریفی که از عملگر داریم **کمیت های فیزیکی باید با یک عملگر توصیف شوند** که با تاثیر روی کت حالت سامانه، ویژه مقادیر شان را به عنوان نتایج اندازه گیری بیرون میدهند و حالت سامانه را به ویژه کت مربوطه تغییر میدهند.

البته هر عملگری نمیتواند نمایشگر کمیتهای فیزیکی باشد و برای این منظور باید واجد ویژگی های خاصی باشد. اولین ویژگی این عملگرها از اصل برهمنهی استنتاج میشود. از آنجا که اصل برهمنهی بیانگر ترکیب خطی از حالتهای کوانتومی است، عملگر متناظر هم باید **خطی** باشد.

از طرفی اگر سامانه در یکی از ویژه کتهای A، مثلا $|\phi_i\rangle$ باشد، که بدین معناست که مقدار مشاهده پذیر A معلوم و برابر a_i باشد، اگر مجددا A را اندازه بگیریم، همواره و با احتمال یک خروجی همان a_i خواهد بود. به عبارتی عملگر $\hat{A}$ حالت $|\phi_i\rangle$ را به خودش نظیر میکند که بلحاظ ریاضیاتی چنین است:

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle \propto |\phi_i\rangle \ . \tag{۸۱.۳}$$

ضریب تناسب باید کمیتی از جنس A باشد و از طرفی مرتبط با ویژه کت $|\phi_i\rangle$. تنها گزینه ویژه مقدار a_i است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle = a_i\,|\phi_i\rangle \ . \tag{۸۲.۳}$$

به این معادله در حالت کلی **معادله ی ویژه مقداری** گوییم که ضرایب a_i و کتهای $|\phi_i\rangle$ به ترتیب ویژه مقادیر و ویژه کتهای عملگر $\hat{A}$ هستند. چون نتیجه ی اندازه گیری هر کمیت فیزیکی باید عددی حقیقی باشد، پس ویژه مقادیر عملگر متناظرش هم باید حقیقی باشد یعنی $a_i \in \mathbb{R}$.

همچنین اگر سامانه ای در ویژه حالت $|\phi_i\rangle$ مشاهده پذیر $\hat{A}$ باشد، اندازه گیری های بعدی کمیت A همچنان همان $|\phi_i\rangle$ را بدست میدهد. به عنوان مثال، اگر پرتو تکفام ناقطبیده ای را در نظر بگیریم، میتوانیم آن را بصورت ترکیب خطی از قطبشهای افقی و عمودی بنویسیم که کت حالت آن بصورت زیر است:

$$|\psi\rangle = c_h\,|h\rangle + c_v\,|v\rangle \ , \tag{۸۳.۳}$$

که $|h\rangle$ و $|v\rangle$ به ترتیب بیانگر حالتهای قطبش افقی و عمودی هستند. حال اگر مطابق شکل (؟؟) این پرتو را از یک قطبنده ی عمودی عبور دهیم، نور خروجی فقط دارای قطبش عمودی با شدتی کمتر از نور ناقطبیده ی اولیه خواهد بود. به عبارتی کت حالت سامانه از $|\psi\rangle$ به $|v\rangle$ فروکاهیده میشود. حال اگر مجددا قطبش سامانه را اندازه بگیریم، خواهیم دید که همواره قطبش آن پس از اندازه گیری عمودی باقی میماند. یعنی اگر پرتو با قطبش عمودی را از یک قطبنده ی عمودی عبور دهیم، تمام پرتو بدون کاهش شدت نور از آن عبور میکند و اگر پرتو با قطبش عمودی را از یک قطبنده ی افقی عبور دهیم هیچ خروجی نداشته و تاریک خواهد بود. در حالت کلی این بدین معناست که احتمال اینکه از اندازه گیری مشاهده پذیر A روی سامانه وقتی در ویژه حالت $|\phi_i\rangle$ است، آنرا در ویژه حالت $|\phi_j\rangle$ برای $j \neq i$ بیابیم صفر است. بنابراین برای $i \neq j$ داریم $\langle\phi_j|\phi_i\rangle = 0$. پس ویژه حالتهای متناظر با ویژه مقادیر متفاوت برهم عمودند. بنابراین عملگر متناظر با مشاهده پذیر A، علاوه بر خطی بودن، باید دارای دو ویژگی بالا باشد: یعنی اولا ویژه مقادیرش حقیقی بوده و ثانیا ویژه کتهای متناظر با ویژه مقادیر متفاوتش بر هم عمود باشند. این دو ویژگی را عملگرهای **هرمیتی** دارا هستند که در قضیه مهم زیر اثبات میشود:

[۳۳] wave function collapse

قضیه ۱.۳. ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی هستند و ویژه کتهای متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمودند.

اثبات: رابطه ویژه مقداری عملگر $\hat{A}$ به صورت زیر است:

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle = a_i\,|\phi_i\rangle\ . \tag{۸۴.۳}$$

با ضرب رابطه بالا از چپ در $\langle\phi_j|$ داریم:

$$\langle\phi_j|\hat{A}|\phi_i\rangle = a_i\,\langle\phi_j|\phi_i\rangle\ . \tag{۸۵.۳}$$

حال اگر از معادله ی (۸۴.۳) همیوغ هرمیتی بگیریم داریم:

$$\Big(\hat{A}\,|\phi_j\rangle\Big)^\dagger = \langle\phi_j|\,\hat{A}^\dagger = \langle\phi_j|\,a_j^*\ . \tag{۸۶.۳}$$

با ضرب این معادله از راست در $|\phi_i\rangle$ داریم

$$\langle\phi_j|\hat{A}^\dagger|\phi_i\rangle = a_j^*\,\langle\phi_j|\phi_i\rangle\ . \tag{۸۷.۳}$$

با کم کردن دو رابطه ی (۸۵.۳) و (۸۷.۳) از یکدیگر داریم:

$$\langle\phi_j|(\hat{A}-\hat{A}^\dagger)|\phi_i\rangle = (a_i - a_j^*)\,\langle\phi_j|\phi_j\rangle\ , \tag{۸۸.۳}$$

که با فرض هرمیتی بودن عملگر $\hat{A}$ یعنی شرط $\hat{A}=\hat{A}^\dagger$، خواهیم داشت:

$$(a_i - a_j^*)\,\langle\phi_j|\phi_i\rangle = 0\ . \tag{۸۹.۳}$$

حل این معادله به ازاء $i=j$ میدهد $a_i^*=a_i$ که بیانگر حقیقی بودن ویژه مقادیر است، و به ازاء $i\neq j$ میدهد $\langle\phi_j|\phi_i\rangle = 0$ که بیانگر تعامد ویژه کتهای متناظر با ویژه مقادیر متفاوت است. بدین ترتیب حکم قضیه اثبات شد. □

نتیجه: به عنوان یک نتیجه از قضیه بالا و همچنین شرط تمامیت، میتوان نتیجه گرفت که مجموعه ی ویژه کتهای یک عملگر هرمیتی میتوانند پایه هایی برای فضای هیلبرت سامانه باشند که گفته میشود تشکیل یک مجموعه کامل میدهند.

به عبارتی فضای هیلبرت سامانه مورد نظر را میتوان بر حسب ویژه کتهای عملگر هرمیتی متناظر با کمیت فیزیک که سامانه را مشخص میکند بسط داد. یعنی هر کت دلخواه در این فضای هیلبرت را میتوان بر حسب ویژه کتهای کمیت فیزیکی بسط داد.

بنابراین اصل بعدی مکانیک کوانتومی بدین ترتیب بیان میشود:

اصل کوانتش: در مکانیک کوانتومی، کمیتهای فیزیکی (که از این به بعد به آنها مشاهده پذیر میگوییم) با عملگرهای خطی و هرمیتی نمایش داده میشوند که روی فضای هیلبرت سامانه اثر میکنند و ویژه کتهای آنها تشکیل یک مجموعه ی کامل میدهند.

البته معادلات ویژه مقداری فقط برای عملگرهای هرمیتی تعریف نمیشود و میتوان در حالت کلی برای یک عملگر، حتی اگر هرمیتی هم نباشد تعریف شود، اما دیگر لزوما ویژه مقادیر ممکن است حقیقی نباشند و لزوما ویژه کتها بر هم عمود نیستند.

بعلاوه اگر معادله ی ویژه مقداری (۸۴.۳) را برای عملگر $\hat{A}$ در نظر بگیریم، هر تابع خوشرفتار $f(\hat{A})$ از $\hat{A}$ هم، اولا خودش یک عملگر است و ثانیا در همان معادله ویژه مقداری با همان ویژه کتها ولی با ویژه مقادیر $f(a_i)$ صدق میکند:

$$f(\hat{A})\,|\phi_i\rangle = f(a_i)\,|\phi_i\rangle\ . \tag{۹۰.۳}$$

تمرین ۷.۳. از معادله ی (۸۴.۳) و با فرض اینکه بتوان تابع $f(\hat{A})$ را بر حسب $\hat{A}$ بسط تیلور داد، معادله ی (۹۰.۳) را بدست آورید. □

۱.۵.۳ مقدار انتظاری

اصل الگوریتم آماری، که احتمال برون داد هریک از نتایج ممکن آزمایش را بدست میدهد، به ما کمک میکند که کمیت مفید مقدار انتظاری[۳۴] یک کمیت را بصورت زیر تعریف کنیم:

مقدار انتظاری: اگر روی یک سامانه با حالت مشخص $|\psi\rangle$ کمیت A را بارها اندازه بگیریم، بدین معنا که هربار پس از اندازه گیری A مجددا حالت $|\psi\rangle$ را تولید کرده و A را برای آن اندازه بگیریم؛ یا بطور معادل روی تعداد زیادی سامانه ی یکسان با حالت $|\psi\rangle$ کمیت A را یک بار اندازه بگیریم؛ میانگین نتایج را مقدار انتظاری کمیت A گوییم که با $\langle\hat{A}\rangle_\psi$ نشان میدهیم از قرار زیر است:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \sum_n a_n \mathrm{Pr}(\psi \to \phi_n)\ . \tag{۹۱.۳}$$

که a_nها ویژه مقادیر عملگر $\hat{A}$ و $|\phi_n\rangle$ها ویژه کتهای آن هستند. میتوان با توجه به رابطه (۸۰.۳) تعریف بالا بصورت زیر نوشت:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \sum_n a_n |\langle\phi_n|\psi\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle\psi|\phi_n\rangle \langle\phi_n|\psi\rangle\ . \tag{۹۲.۳}$$

حال با توجه به رابطه (۸۲.۳) داریم:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \sum_n \langle\psi|\hat{A}|\phi_n\rangle \langle\phi_n|\psi\rangle = \langle\psi|\, \hat{A}\Big(\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\Big)\, |\psi\rangle\ , \tag{۹۳.۳}$$

که با توجه به رابطه تمامیت خواهیم داشت:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\ , \tag{۹۴.۳}$$

که تعریف معادل دیگری برای مقدار انتظاری است.

اگر حالت $|\psi\rangle$ بهنجار نباشد، مقدار انتظاری به شکل کلی زیر تعریف میشود:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\ . \tag{۹۵.۳}$$

در ادامه یک قضیه مهم برای مقدار انتظاری عملگرهای هرمیتی بیان میکنیم:

قضیه ۲.۳. مقدار انتظاری یک عملگر حقیقی است اگر و تنها اگر آن عملگر هرمیتی باشد.

اثبات: با نوشتن مقدار انتظاری عملگر $\hat{A}$ شروع میکنیم:

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = \sum_n a_n \mathrm{Pr}(\psi \to \phi_n) = \sum_n a_n |\langle\phi_n|\psi\rangle|^2\ . \tag{۹۶.۳}$$

عبارت بالا در صورتی حقیقی است که a_nها حقیقی باشند که زمانی برقرار است که عملگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد و برعکس. □

برخی کتابها از قضیه بالا برای تعریف عملگر هرمیتی استفاده میکنند، بدین معنا که **عملگری هرمیتی است که مقدار انتظاری آن حقیقی باشد.**

از مقدار انتظاری میتوان برای وارسی کردن برابری دو عملگر استفاده کرد که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۳.۳. دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ یکسان هستند اگر و تنها اگر برای هر حالت دلخواه $|\psi\rangle$ مقدار انتظاری آنها برابر باشد یعنی:

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle\ . \tag{۹۷.۳}$$

اثبات: این قضیه بلافاصله و بی واسطه اثبات میشود. □

[۳۴] expectation value

۶.۳ تحول زمانی

از اصول موضوعه مکانیک کوانتومی، تا به اینجا یک اصل سلبی (اصل مکملیت یا عدم قطعیت) و چهار اصل ایجابی را بیان کردیم. در اصل بردار حالت گفتیم که حالت هر سامانه ی کوانتومی با یک کت معین میشود که حاوی تمامی اطلاعاتی است که از سامانه قابل استخراج است. آخرین اصل مکانیک کوانتومی درباره ی تحول زمانی کت حالت یک سامانه صحبت میکند.

در مکانیک کلاسیک، دانستن مکان و سرعت ذره (یا بطور معادل مکان و تکانه آن)، حالت ذره را در تمام لحظات بعدی معین میکند که به کمک قانون دوم نیوتون بیان شده است. از آنجا که برای دانستن حالت ذره هم به مکان و هم به سرعت آن نیاز داریم، طبیعتا معادله دیفرانسیل توصیف کننده ی ذره (یعنی قانون دوم نیوتن) باید شامل مشتق زمانی از مرتبه ی ۲ باشد. در مکانیک کوانتومی، چون فقط از حالت سامانه، و نه مشتقاتش، در لحظه ی t_0 اطلاع داریم و قاعدتا طبق اصل بردار حالت، این اطلاع باید تمامی اطلاعات لازم از سامانه را در هر لحظه و در تمام لحظات بعدی به ما بدهد، پس معادله دیفرانسیل توصیف کننده ی سامانه باید شامل مشتقات زمانی از مرتبه ی یک باشد وگرنه دانستن حالت سامانه در لحظه ی t_0 برای توصیف آن در لحظات بعد کفایت نمیکند. به عبارتی مقدار $\partial\,|\psi(t)\rangle/\partial t$ باید توسط $|\psi(t)\rangle$ در همان لحظه تعیین شود. در کلی تریم حالت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{O}}\,|\psi(t)\rangle\ , \tag{۹۸.۳}$$

که $\hat{\mathcal{O}}$ عملگری خطی است. خطی بودن $\hat{\mathcal{O}}$ نتیجه ی اصل برهمنهی و خطی بودن مکانیک کوانتومی است.

برای تعیین $\hat{\mathcal{O}}$ مجبوریم از مکانیک کلاسیک کمک بگیریم. این یکی از آن موقعیتهایی است که همانگونه که در بخش (؟؟) گفته شد مکانیک کوانتومی علی رغم اینکه نظریه ای کلی تر از مکانیک کلاسیک است، اما برای ساختن خود به مکانیک کلاسیک نیازمند است. در مرور بر مکانیک کلاسیک بخش (؟؟) دیدیم که کمیتی که بخاطر همگنی زمان پایسته است انرژی یا همان هامیلتونی سامانه است. به عبارتی و بنا بر اصل کوانتش، کمیتی که تحت تحول زمانی ناوردا میماند عملگر $\hat{H}$ است. پس با توجه به اصل تطابق، عملگر $\hat{\mathcal{O}}$ باید تابعی از $\hat{H}$ باشد و بنابراین داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = f(\hat{H})\,|\psi(t)\rangle\ . \tag{۹۹.۳}$$

خطی بودن عملگر $\hat{\mathcal{O}}$ این الزام را پدید می آورد که $\hat{\mathcal{O}} = f(\hat{H}) = a\hat{H}$، و بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = a\hat{H}\,|\psi(t)\rangle\ . \tag{۱۰۰.۳}$$

که a عددی مختلط است. برای تعیین a از شرط بهنجارش $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ استفاده میکنیم یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \Big(\frac{\partial\,\langle\psi(t)|}{\partial t}\Big)\,|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\,\Big(\frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t}\Big) = 0\ . \tag{۱۰۱.۳}$$

همچنین همیوغ مختلط معادله (۱۰۰.۳) برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\langle\psi(t)| = a^*\,\langle\psi(t)|\,\hat{H}\ , \tag{۱۰۲.۳}$$

که در آن از هرمیتی بودن هامیلتونی استفاده کرده ایم. با جایگذاری $\partial\,|\psi\rangle/\partial t$ و $\partial\,\langle\psi|/\partial t$ از معادلات (۱۰۰.۳) و (۱۰۲.۳) در معادله ی (۱۰۱.۳) خواهیم داشت:

$$\langle\psi(t)|\Big(a^*\hat{H} + a\hat{H}\Big)|\psi(t)\rangle = 0\ , \tag{۱۰۳.۳}$$

که میدهد $a = -a^*$ که بدین معناست که a باید موهومی باشد. بعلاوه با توجه به معادله ی (۱۰۰.۳) واضح است که a باید دارای واحد $(\mathrm{J.s})^{-1}$ باشد. تنها ثابتی که دارای واحد $\mathrm{J.s}$ است ثابت پلانک $\hbar$ است. بنابراین و با توجه به اصل هم ارزی قرار میدهیم $a = 1/i\hbar$. بنابراین معادله ای که تحول زمانی کت حالت سامانه ی کوانتومی را توصیف میکند به عنوان اصل پنجم مکانیک کوانتومی از قرار زیر بدست می آید:

اصل تحول زمانی: تحول زمانی هر سامانه ی کوانتومی با کت حالت $|\psi(t)\rangle$ با معادله ی زیر توصیف میشود:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle \ , \tag{۱۰۴.۳}$$

که به **معادله ی شرودینگر** معروف است.

از معادله ی شرودینگر واضح است که اگر هامیلتونی سامانه را بدانیم، $|\psi(t)\rangle$ بصورت **کاملا تعینی** در زمان تحول میابد. این بدان معنی است که دانستن حالت سامانه در لحظه ی دلخواه t_0، به ما اجازه ی پیشبینی قطعی حالت سامانه بصورت یکتا در آینده (و گذشته را میدهد). البته باید به این نکته توجه داشت که آنچه تعینی است تحول کت حالت سامانه است ولی ساختار ذاتی احتمالاتی نظریه، به این معنا که خروجی اندازه گیری روی سامانه ذاتا تصادفی است، همچنان پابرجاست.

با گرفتن همیوغ هرمیتی معادله ی (۱۰۴.۳) به معادله ی شرودینگر برای $\langle\psi(t)|$ میرسیم:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\psi(t)\right| = \left\langle\psi(t)\right|\hat{H} \ . \tag{۱۰۵.۳}$$

در حالتی که $\hat{H}$ وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد، میتوان از معادله شرودینگر انتگرال گرفت و داریم:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\left|\psi(0)\right\rangle \ , \tag{۱۰۶.۳}$$

که $|\psi(0)\rangle$ حالت سامانه در لحظه ی $t=0$ است. در حالت کلی تر داریم:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}\left|\psi(t_0)\right\rangle \ . \tag{۱۰۷.۳}$$

اگر هامیلتونی $\hat{H}$ تابعی صریح از زمان باشد (که بدین معناست که انرژی پتانسیل وابسته به زمان باشد)، حل معادله ی شرودینگر ساده نخواهد بود و معمولا به روشهای تقریبی نیاز است که در فصل (؟؟) گفته خواهد شد.

در رابطه ی (۱۰۷.۳)، عبارت $\exp\left[-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar\right]$ کت $|\psi(t_0)\rangle$ را به کت $|\psi(t)\rangle$ تبدیل کرده است و بنابراین یک عملگر است. البته از ظاهر این عبارت هم مشخص است که با یک عملگر سروکار داریم. چراکه تابعی نمایی از عملگر $\hat{H}$ است و تابعی از یک عملگر، خود یک عملگر است. چون این عملگر حالت سامانه را از زمان t_0 به زمان t میبرد، مسئول تحول زمانی است و به آن عملگر تحول زمانی گوییم:

$$\hat{\mathcal{U}}(t,t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \ , \tag{۱۰۸.۳}$$

و بوضوح یکانی است. عملگر هامیلتونی $\hat{H}$ هم مولد تحول زمانی است . برای $t_0=0$ داریم

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \ . \tag{۱۰۹.۳}$$

همیوغ هرمیتی عملگر تحول زمانی از قرار زیر است:

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger = e^{+i\hat{H}t/\hbar} = e^{-i\hat{H}(-t)/\hbar} = \hat{\mathcal{U}}(-t) \ , \tag{۱۱۰.۳}$$

و بنابراین

$$\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t) = \hat{\mathcal{U}}(-t) \ . \tag{۱۱۱.۳}$$

رابطه بالا نشان دهنده ی تقارن روبه پیش - روبه پس در مکانیک کوانتومی است که به بازگشت زمانی[۳۵] معروف است. معادله ی شرودینگر تحت بازگشت زمانی ناورداست.

[۳۵] time reversal

براکت بیانگر دامنه ی احتمال است. بنابراین $\langle\psi|\hat{\mathcal{U}}(t)|\phi\rangle$ دامنه ی احتمال این است که حالت اولیه ی $|\phi\rangle$ پس از گذشت زمان t بصورت یکانی به حالت $|\psi\rangle$ تحول یابد. همچنین با توجه به (۱۱۱.۳) داریم:

$$\Big(\langle\psi|\hat{\mathcal{U}}(t)|\phi\rangle\Big)^* = \langle\phi|\mathcal{U}(\hat{-}t)|\psi\rangle \ . \qquad (۱۱۲.۳)$$

سمت راست عبارت بالا دامنه ی احتمال این است که حالت نهایی $|\psi\rangle$ در مدت زمان t و عقبگرد در زمان تحول یابد و به حالت $|\phi\rangle$ در لحظه ی ابتدایی $t_0 = 0$ برسد. البته باید توجه داشت این به معنی سفر به گذشته نیست! بصورت خاص، عبارت $\langle\psi|\hat{\mathcal{U}}(t)|\psi\rangle$ بیانگر دامنه ی احتمال این است که حالت اولیه ی $|\psi\rangle$ پس از تحول زمانی به اندازه ی t بدون تغییر بماند. به مربع بزرگی این عبارت تابع خودهمبستگی[۳۶] گفته میشود.

با دانستن هامیلتونی سامانه، تحول زمانی $|\psi(0)\rangle$ به $|\psi(t)\rangle$ کاملا معلوم است. از طرفی میدانیم که اندازه گیری هر مشاهده پذیری با یک احتمال مشخص فقط یکی از ویژه مقادیرش را بدست میدهد. یعنی کت حالت $|\psi(t)\rangle$ به یکی از ویژه کتهای مشاهده پذیر مربوطه کاهش میابد که فرآیندی کاملا تصادفی و **غیریکانی** است. این، همان مسئله ی اندازه گیری در مکانیک کوانتومی است و هیچ عملگر یکانی را نمیتوان ساخت که این تغییر ناگهانی (فروکاهش تابع موج) را نمایندگی کند. البته میتوان عملگر یکانی ساخت که **یک حالت خاص** برهمنهی از ویژه کتهای یک عملگر را به یکی از ویژه کتها نظیر کند. اما این مستلزم دانستن دقیق برهمنهی مزبور است که بدین معنی است که ما پیشاپیش از حالت اولیه سامانه اطلاع داریم. به عبارتی **هیچ راهی وجود ندارد** که یک تبدیل یکانی را بیابیم که آزمایشگر را به این اطلاعات مجهز کند که نتیجه ی نهایی آزمایش چیست.

این مسئله از میتوان از دیدگاه دوران در فضای هیلبرت هم بررسی کرد. یک تبدیل یکانی در حالت کلی یک کت را در فضای هیلبرت دوران میدهد. حال ممکن است که بتوان تبدیلی یافت که یک کت بخصوص را به روی یکی از مولفه هایش (یکی از ویژه کتهای مشاهده پذیر مورد نظر) تصویر کرد، اما امکان ندارد بتوان هر کت دلخواهی را با همان تبدیل به یک ویژه کت بخصوص تصویر کرد. به عبارت ساده تر، نمیتوان هر برداری را با یک زاویه دوران یکسان به یک بردار پایه بخصوص تصویر کرد.

۱.۶.۳ حالت های مانا

در کل، حالت سامانه در هنگام تحول زمانی تغییر میکند و به عبارتی کت های $|\psi(t_0)\rangle$ و $|\psi(t)\rangle$ با هم برابر نیستند. اما فرض کنیم حالت سامانه در ابتدا یک ویژه حالت انرژی باشد، یعنی

$$\hat{H}\,|\psi(t_0)\rangle = E\,|\psi(t_0)\rangle \ , \qquad (۱۱۳.۳)$$

که E ویژه مقدار هامیلتونی و انرژی سامانه است. در این حالت تحول زمانی سامانه بصورت زیر خواهد بود:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}\,|\psi(t_0)\rangle \ . \qquad (۱۱۴.۳)$$

محاسبه ی $|\psi(t)\rangle$ در این حالت کار آسانی است. چرا که بنا بر معادله ی (۹۰.۳) معادله ی بالا بصورت زیر در می آید:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE(t-t_0)/\hbar}\,|\psi(t_0)\rangle \ . \qquad (۱۱۵.۳)$$

عبارت نمایی $e^{-iE(t-t_0)/\hbar}$ عددی مختلط با بزرگی یک است. پس کت $|\psi(t)\rangle$ با کت $|\psi(t_0)\rangle$ متناسب است. بنابراین با تحول زمان، کت حالت سامانه تغییر نکرده است. به چنین حالتهایی، **حالت مانا** گویند که خصوصیت ویژه کتهای انرژی است. به عبارتی ویژه حالت انرژی با گذشت زمان تحول نمیابد. یعنی ویژه حالتهای انرژی حالتهای مانای سامانه هستند و اگر سامانه در یکی از این ویژه حالتها باشد با گذشت زمان به حالت دیگری تحول نمیابد. اما اگر $|\psi(t_0)\rangle$ ویژه حالت انرژی نباشد (که بدین معناست که ترکیب خطی از چندین ویژه حالت انرژی است)، حالت سامانه با گذشت زمان تغییر میکند یعنی $|\psi(t)\rangle \neq |\psi(t_0)\rangle$.

تمرین ۸.۳. ثابت کنید اگر حالت یک سامانه ویژه حالت انرژی نباشد، با گذشت زمان تغییر میکند. □

برای بدست آوردن $|\psi(t)\rangle$ در حالت کلی، کت $|\phi(0)\rangle$ را بر حسب ویژه حالتهای انرژی بسط میدهیم. یعنی اگر فرض کنیم E_n و $|\phi_n\rangle$ به ترتیب ویژه مقادیر و ویژه کتهای انرژی باشند داریم:

$$\hat{H}\,|\phi_n\rangle = E_n\,|\phi_n\rangle \ . \qquad (۱۱۶.۳)$$

[۳۶] auto-correlation function

حال اگر بر اساس نتیجه ی قضیه (۱.۳)، این ویژه کتها را پایه های فضا قرار دهیم، میتوانیم کت $|\phi(0)\rangle$ را بر حسب آنها بسط دهیم:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0)\,|\phi_n\rangle \ , \tag{۱۱۷.۳}$$

که $c_n(0)$ ضرایب بسط در لحظه ی $t = 0$ هستند و جمع روی کل ویژه کتهای انرژی گرفته میشود. با تاثیر عملگر تحول زمانی $\hat{\mathcal{U}}(t)$ داریم:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t)\,|\psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\sum_n c_n(0)\,|\phi_n\rangle \ , \tag{۱۱۸.۳}$$

و بنابراین

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar}\,|\phi_n\rangle \ . \tag{۱۱۹.۳}$$

برای زمانی که طیف انرژی پیوسته باشد معادله ویژه مقداری انرژی بصورت زیر خواهد بود:

$$\hat{H}\,|\phi_E\rangle = E\,|\phi_E\rangle \ , \tag{۱۲۰.۳}$$

که ویژه حالتهای پیوسته ی انرژی بجای اندیس گسسته ی n، با مقدار پیوسته ی انرژی E نشان گذاری شده اند. بنابراین بسط $|\psi(0)\rangle$ را بصورت زیر میتوانیم بنویسیم:

$$|\psi(0)\rangle = \int \mathrm{d}E\ c(E)\,|\phi_E\rangle \ , \tag{۱۲۱.۳}$$

و تحول زمانی حالت اولیه $|\psi(0)\rangle$ به $|\psi(t)\rangle$ از قرار زیر خواهد بود:

$$|\psi(t)\rangle = \int \mathrm{d}E\ c(E) e^{-iEt/\hbar}\,|\phi_E\rangle \ . \tag{۱۲۲.۳}$$

از معادلات (۱۱۹.۳) و (۱۲۲.۳) معلوم است که حل معادله ی ویژه مقداری انرژی یک مرحله ی لازم برای تعیین تحول زمانی هر سامانه ای است. بنابراین معادلات (۱۱۶.۳) و (۱۲۰.۳) را معادلات شرودینگر مستقل از زمان گوییم درحالی‌که معادله ی (۱۰۴.۳) را معادله ی شرودینگر وابسته به زمان میگوییم.

۲.۶.۳ تحول زمانی مقدار انتظاری

با تحول زمانی حالت سامانه، مقادیر انتظاری کمیتها هم تحول میابند. در اینجا و به کمک معادله ی شرودینگر تحول زمانی مقادیر انتظاری یک مشاهده پذیر فیزیکی را بررسی میکنیم. اگر حالت سامانه $|\psi(t)\rangle$ بهنجار باشد، مقدار انتظاری مشاهده پذیر $\hat{A}$ از قرار زیر است:

$$\langle \hat{A}\rangle_\psi = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle \ . \tag{۱۲۳.۳}$$

مشتق زمانی عبارت بالا برابر است با

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle_\psi = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|\Big)\hat{A}\,|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\Big(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\Big)|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\,\hat{A}\Big(\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\Big) \ , \tag{۱۲۴.۳}$$

که به کمک معادلات (۱۰۴.۳) و (۱۰۵.۳) بصورت زیر در می آید:

$$\frac{d}{dt}\Big\langle\hat{A}\Big\rangle_\psi = \Big\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\Big\rangle_\psi + \frac{1}{i\hbar}\Big\langle\Big[\hat{A},\hat{H}\Big]\Big\rangle_\psi \ . \tag{۱۲۵.۳}$$

اگر $\hat{A}$ وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد، یعنی $\partial\hat{A}/\partial t = 0$، داریم:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}\right\rangle_{\psi} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{A},\hat{H}\right]\right\rangle_{\psi} \ , \qquad (۱۲۶.۳)$$

که بدین معناست که اگر $\hat{A}$ با هامیلتونی سامانه، $\hat{H}$، جابجا شود یعنی $\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0$، آنگاه

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}\right\rangle_{\psi} = 0 \ , \qquad (۱۲۷.۳)$$

و این یعنی مقدار $\langle\hat{A}\rangle_{\psi}$ با زمان تغییر نمیکند و **ثابت حرکت** است.

تمرین ۹.۳. عملگر $\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ را در نظر بگیرید که به آن عملگر چگالی هم گفته میشود. $\langle d\hat{\rho}/dt\rangle_{\psi}$ را حساب کنید. □

۳.۶.۳ تحول زمانی عملگر

در معادله ی (۱۲۳.۳) تحول زمانی سامانه توسط کت $|\psi(t)\rangle$ نمایندگی میشد ولی عملگرها در زمان تحول نمیافتند که به آن تصویر شرودینگر گویند. میتوان به عکس، تحول زمانی را به عملگر نسبت داد و کتها در زمان ثابت باشند که به تصویر هایزنبرگ معروف است. میتوان این معادله را به کمک رابطه ی (۱۰۶.۳) و (۱۰۹.۳) بصورت زیر نوشت:

$$_S\langle\psi(t)|\hat{A}_S|\psi(t)\rangle_S = {}_S\langle\psi(0)|\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(t)\hat{A}_S\,\hat{\mathcal{U}}(t)|\psi(0)\rangle_S = {}_H\langle\psi|\hat{A}_H|\psi\rangle_H \ , \qquad (۱۲۸.۳)$$

که داریم

$$|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S \ , \quad \hat{A}_H(t) = \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(t)\hat{A}_S\,\hat{\mathcal{U}}(t) \ . \qquad (۱۲۹.۳)$$

اندیسهای S و H به ترتیب نمایشگر تصویرهای شرودینگر و هایزنبرگ است.

تمرین ۱۰.۳. ثابت کنید تصاویر شرودینگر و هایزنبرگ برای عملگر هامیلتونی یکسان است. □

۴.۶.۳ معادله ی هایزنبرگ

همانگونه که معادله ی شرودینگر تحول کت را در تصویر شرودینگر بیان میکند، معادله ای که تحول عملگر را در تصویر هایزنبرگ بیان میکند معادله ی هایزنبرگ نام دارد. از معادله ی (۱۲۸.۳) داریم:

$$\frac{d}{dt}\,{}_H\langle\psi|\hat{A}_H|\psi\rangle_H = {}_H\langle\psi|\frac{d}{dt}\hat{A}_H|\psi\rangle_H \ , \qquad (۱۳۰.۳)$$

و همچنین

$$\frac{d}{dt}\,{}_S\langle\psi(0)|\hat{\mathcal{U}}^{\dagger}(t)\hat{A}_S\,\hat{\mathcal{U}}(t)|\psi(0)\rangle_S = {}_H\langle\psi|\Big(\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H,\hat{H}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t)\Big)|\psi\rangle_H \ . \qquad (۱۳۱.۳)$$

از برابری معادلات (۱۳۰.۳) و (۱۳۱.۳) خواهیم داشت:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t) + \left[\hat{A}_H(t),\hat{H}\right] . \qquad (۱۳۲.۳)$$

اگر $\partial\hat{A}_S/\partial t = 0$ خواهیم داشت

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}(t),\hat{H}\right] , \qquad (۱۳۳.۳)$$

که به معادله ی هایزنبرگ معروف است. از معادله ی هایزنبرگ نتیجه میگیریم که اگر مشاهده پذیری صریحا به زمان بستگی نداشته باشد ($\partial \hat{A}_S/\partial t = 0$) در صورتی که با هامیلتونی جابجا شود ثابت حرکت است. معادل این گزاره را در مکانیک کلاسیک درباره ی کروشه های پواسون داریم. با توجه به معادلات و داریم:

$$\dot{q_k} = \{q_k, H\} \ , \quad \dot{p_k} = \{p_k, H\} \ , \tag{۱۳۴.۳}$$

که با توجه به معادله ی (۱۳۳.۳) میبنیم که جایگذاری

$$\{., ..\} \to \frac{1}{i\hbar}[., ..] \ . \tag{۱۳۵.۳}$$

را میتوان به عنوان یک قاعده برای گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی در نظر گرفت.

بنابراین کروشه های پواسون معادل کلاسیکی معادله ی هایزنبرگ هستند درحالیکه معادله ی شرودینگر دوگان کلاسیکی ندارد. علت این است که در مکانیک کلاسیک حالت سامانه چیزی جز مجموعه ای از ویژگی های آن (مقادیر مشاهده پذیرها) نیست و بنابراین خودش یک مشاهده پذیر است.

۵.۶.۳ قضیه اهرنفست

۷.۳ اصول موضوعه مکانیک کوانتومی

۸.۳ جابجایی عملگرها

طبق اصل کوانتش، مشاهده پذیرهای فیزیکی را با عملگرهای هرمیتی نمایش میدهیم. در بخش (۱.۴.۳) گفته شد که عملگرها در حالت کلی جابجا پذیر نیستند. حال این موضوع و پیامدهای فیزیک آنرا بیشتر و عمیقتر بررسی میکنیم. بدین منظور به آزمایش قطبش بازمیگردیم. مطابق شکل (۱۱.۳)a نور ناقطبیده با شدت I_0 به قطبنده ی عمودی P_1 وارد میشود. قطبنده ی P_2 افقی است و به عبارتی بردارهای قطبش $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \ . \tag{۱۳۶.۳}$$

در این حالت **مشاهده میشود** که خروجی قطبنده ی P_2 تاریک است و به عبارتی $I_2 = 0$.

حال اگر مطابق شکل (۱۱.۳)b بین قطبنده های P_1 و P_2، قطبنده ی P_3 را قرار دهیم که زاویه ی قطبش آن ϕ است که نه عمودی و نه افقی است یعنی $\phi \neq 0, \pi/2$. در این حالت شدت خروجی از P_2 برابر است با

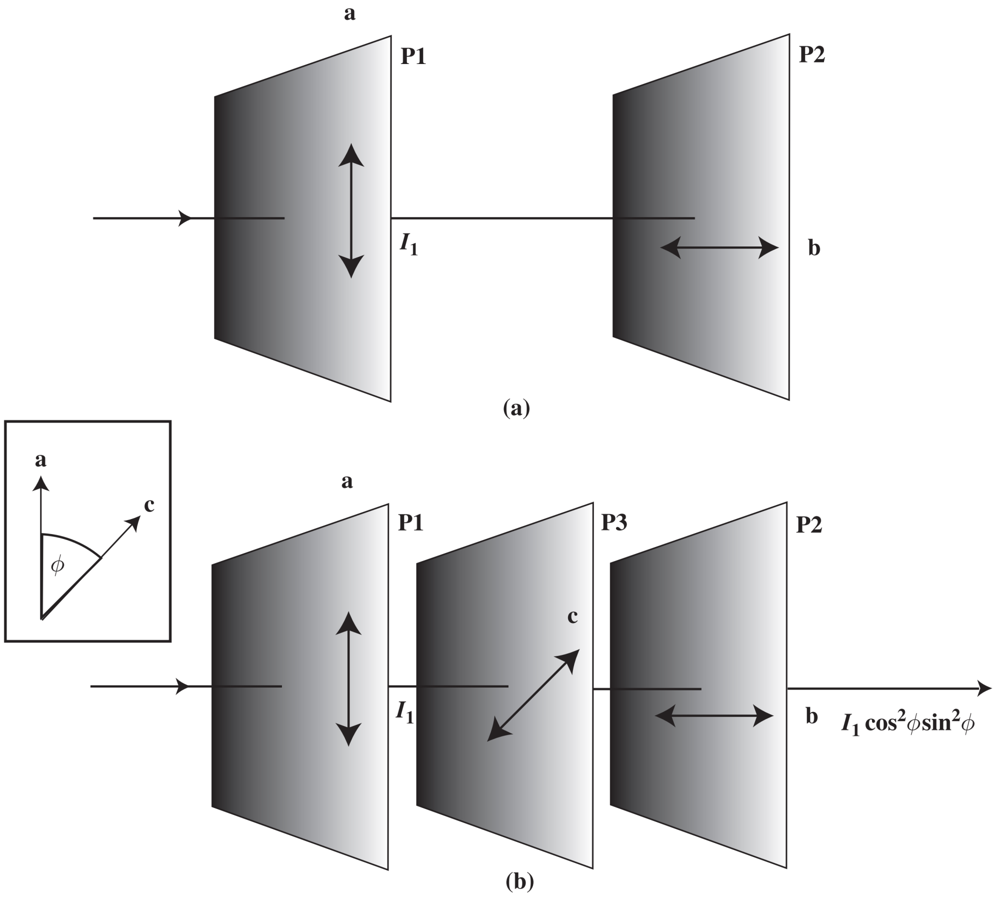
$$I_2 = I_1 \cos^2\phi \sin^2\phi \ , \tag{۱۳۷.۳}$$

که برای $\phi \neq 0, \pi/2$ غیرصفر است.

نکته ی مهم این آزمایش این است که پس از آنکه پرتو نور از P_1 عبور کرد، فقط دارای قطبش عمودی است و مولفه ی قطبش افقی آن که موازی با بردار $\mathbf{b}$ است صفر است. پس پرتو ورودی به به قطبنده ی P_3 دارای هیچ مولفه ی افقی نیست. بنابراین انتظار داریم خروجی نهایی از قطبنده ی افقی P_2، یعنی I_2، صفر باشد. اما بر خلاف انتظار آنچه از آزمایش **مشاهده میکنیم** این است که $I_2 \neq 0$. فهم این مسئله به لحاظ شهودی سخت است چراکه اضافه کردن P_3 شدت پرتو را افزایش نمیدهد که انتظار داشته باشیم در این افزایش، مولفه ای افقی از قطبش هم به پرتو اضافه شود؛ بلکه با کاهش شدت پرتو هم روبرو هستیم. تنها راه فائق آمدن بر این مشکل این است که بپذیریم پس از P_3، حالت فوتون توسط برهمنهی دو حالت متناظر با قطبشهای افقی (موازی با بردار $\mathbf{b}$) و عمودی (موازی با بردار $\mathbf{a}$) توصیف میشود. از طرفی اگر ترتیب P_2 و P_3 را عوض کنیم، **مشاهده خواهیم کرد** که خروجی نهایی بوضوح صفر است ($I = 0$)، چراکه در این حالت خروجی P_2 یا به عبارتی ورودی P_3 صفر است و بنابراین خروجی نهایی هم صفر خواهد بود.

اثر این قطبنده ها که قطبش سامانه را تعیین میکنند و حالت سامانه را (بلحاظ قطبش) عوض میکنند را میتوان بصورت تاثیر یک عملگر تعبیر کرد که روی حالت سامانه اثر میکند. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده از این آزمایش به نتایج زیر میرسیم:

دو نتیجه ی مهم:



شکل ۱۱.۳: ....

۱. از تاثیر عملگر $\hat{P}_3$ میفهمیم که اندازه گیری حالت سامانه را بکلی عوض میکند و حتی حالتهایی را که قبلا در سامانه حضور نداشته اند را هم به آن اضافه میکند. (P_3 قطبش $\mathbf{b}$ را اضافه کرد.)

۲. ترتیب تاثیر عملگرها مهم است یعنی $\hat{P}_2\hat{P}_3 \neq \hat{P}_3\hat{P}_2$. به عبارتی در مکانیک کوانتومی عملگرها جابجاپذیر نیستند.

به بیان دیگر: تفاوت اساسی کمیتها در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی این است که کمیتها در مکانیک کلاسیک با اعداد کلاسیکی (c-numbers) نمایش داده میشوند و بنابراین باهم جابجا میشوند؛ درحالیکه در مکانیک کوانتومی با اعداد کوانتومی (q-numbers) یعنی عملگرها نشان داده میشوند و لزوما باهم جابجا نمیشوند. به عبارتی:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}\,, \quad \text{یا} \quad \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0\,. \tag{۱۳۸.۳}$$

مفهوم **جابجاناپذیری** ابتدا توسط هایزنبرگ معرفی شد و سپس توسط بورن، یوردان و خود هایزنبرگ شفاف شد. در ادامه برخی خواص جابجای عملگرها را بیان میکنیم.

۱. جابجایی دو عملگر پادمتقارن است:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = -\left[\hat{B}, \hat{A}\right]\,. \tag{۱۳۹.۳}$$

۲. جابجایی دو عملگر خطی است:

$$\left[\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \hat{C}\right] = \alpha\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \beta\left[\hat{B}, \hat{C}\right]\,. \tag{۱۴۰.۳}$$

۳.

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}\ . \qquad (۱۴۱.۳)$$

۴. اتحاد ژاکوبی

$$\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right]+\left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right]+\left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\ . \qquad (۱۴۲.۳)$$

۵. هر عملگر با خودش جابجا میشود:

$$\left[\hat{A},\hat{A}\right]=0\ . \qquad (۱۴۳.۳)$$

۶. هر عملگر با هر تابعی از خودش جابجا میشود:

$$\left[\hat{A},f(\hat{A})\right]=0\ . \qquad (۱۴۴.۳)$$

۷. اگر $\hat{A}$ با $\hat{B}$ جابجا شود و $\hat{B}$ با $\hat{C}$ جابجا شود، لزوما این نتیجه را **نمیدهد** که $\hat{A}$ با $\hat{C}$ جابجا میشود:

اگر $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$, و $\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0\ ,\nRightarrow\left[\hat{A},\hat{C}\right]=0\ .$ (۱۴۵.۳)

حال سوال مهمی که مطرح میشود این است که تحت چه شرایطی دو مشاهده پذیر **جابجا میشوند**؟ به عبارتی تحت چه شرایطی **ترتیب اندازه گیری آنها مهم نیست**؟ قضیه مهم زیر موضوع را روشن میکند:

قضیه ۴.۳. دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ جابجا میشوند اگر و تنها اگر مجموعه ویژه کتهای مشترک داشته باشند.

اثبات: ابتدا ثابت میکنیم اگر دو مشاهده پذیر ویژه کتهای مشترکی داشته باشند، باهم جابجا میشوند. سپس اثبات میکنیم که اگر باهم جابجا شوند، ویژه کتهای مشترک دارند.

مرحله ۱: ابتدا فرض میکنیم دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دارای ویژه کتهای مشترک باشند یعنی:

$$\hat{A}\left|\phi_n\right\rangle = a_n\left|\phi_n\right\rangle\ , \qquad (۱۴۶.۳)$$
$$\hat{B}\left|\phi_n\right\rangle = b_n\left|\phi_n\right\rangle\ , \qquad (۱۴۷.۳)$$

که a_n و b_n به ترتیب ویژه مقادیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\{\left|\phi_n\right\rangle\}$ ویژه کتهای مشترک آنها هستند. بر این اساس خواهیم داشت:

$$\hat{A}\hat{B}\left|\phi_n\right\rangle=\hat{A}b_n\left|\phi_n\right\rangle=b_n\hat{A}\left|\phi_n\right\rangle=b_na_n\left|\phi_n\right\rangle\ , \qquad (۱۴۸.۳)$$
$$\hat{B}\hat{A}\left|\phi_n\right\rangle=\hat{B}a_n\left|\phi_n\right\rangle=a_n\hat{B}\left|\phi_n\right\rangle=a_nb_n\left|\phi_n\right\rangle\ , \qquad (۱۴۹.۳)$$

و از آنجا که $a_nb_n=b_na_n$، به این نتیجه میرسیم که $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$ یا به عبارتی $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$ که حکم مسئله است. حال به اثبات مرحله بازگشت میپردازیم.

مرحله ۲: حال میخواهیم ثابت کنیم اگر دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ باهم جابجا شوند، دارای مجموعه ویژه کتهای مشترکند. فرض کنیم مجموعه ی $\{\left|\phi_n\right\rangle\}$ پایه ای برای فضای هیلبرت سامانه ی ما باشد. در این صورت داریم:

$$\langle\phi_j|\hat{A}\hat{B}|\phi_k\rangle=\sum_n\ \langle\phi_j|\hat{A}|\phi_n\rangle\ \langle\phi_n|\hat{B}|\phi_k\rangle\ . \qquad (۱۵۰.۳)$$

حال فرض میکنیم $\{\left|\phi_n\right\rangle\}$ ویژه کتهای $\hat{A}$ هستند که $\hat{A}\left|\phi_n\right\rangle=a_n\left|\phi_n\right\rangle$. بنابراین عبارت (۱۵۰.۳) بصورت زیر در می آید:

$$\langle\phi_j|\hat{A}\hat{B}|\phi_k\rangle=\sum_n a_n\delta_{jn}\,\langle\phi_n|\hat{B}|\phi_k\rangle=a_j\,\langle\phi_j|\hat{B}|\phi_k\rangle\ . \qquad (۱۵۱.۳)$$

با برعکس کردن ترتیب عملگرها، به طریق مشابه داریم:

$$\langle\phi_j|\hat{B}\hat{A}|\phi_k\rangle = a_k\,\langle\phi_j|\hat{B}|\phi_k\rangle\ . \qquad (۱۵۲.۳)$$

از طرفی فرض ما این است که دو عملگر جابجا میشوند، بنابراین:

$$\langle\phi_j|\hat{A}\hat{B}|\phi_k\rangle = \langle\phi_j|\hat{B}\hat{A}|\phi_k\rangle\ , \qquad (۱۵۳.۳)$$

که با توجه به (۱۵۱.۳) و (۱۵۲.۳) خواهیم داشت:

$$(a_j - a_k)\,\langle\phi_j|\hat{B}|\phi_k\rangle = 0\ . \qquad (۱۵۴.۳)$$

این شرط برای $j = k$ بدیهی است و ارضا میشود. برای حالت $j \neq k$ فرض میکنیم $a_j \neq a_k$[۳۷]، که در این حالت خواهیم داشت $\langle\phi_j|\hat{B}|\phi_k\rangle = 0$. برای اینکه این رابطه برای تمام $j \neq k$ برقرار باشد، لازم است اثر $\hat{B}$ روی هر کت $|\phi_j\rangle$ ضریبی از خود $|\phi_j\rangle$ باشد که بدین معناست که $\{|\phi_j\rangle\}$ ویژه کتهای $\hat{B}$ نیز هستند و بنابراین $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دارای مجموعه ویژه کت مشترکند و بدین ترتیب قضیه بصورت کامل اثبات میشود. □

به عنوان یک نتیجه از قضیه بالا داریم:

نتیجه (اندازه پذیری همزمان): شرط لازم و کافی برای اینکه دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ همزمان قابل اندازه گیری باشند این است که باهم جابجا شوند.

اثبات: اگر $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ پس بنا بر قضیه بالا دارای مجموعه ویژه کتهای مشترک هستند (مثلا $\{|\phi_j\rangle\}$) یعنی

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle = a_i\,|\phi_i\rangle\ ,\ \text{و}\ \ \hat{B}\,|\phi_i\rangle = b_i\,|\phi_i\rangle\ . \qquad (۱۵۵.۳)$$

این بدین معناست که یک پایه ی مشترک وجود دارد که در آن هر دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ معلوم هستند. به عبارت دیگر برای هر حالت $|\phi_k\rangle$ از پایه ها، اگر مشاهده پذیر $\hat{A}$ اندازه گیری شود با قطعیت ویژه مقدار a_k را به عنوان خروجی بدست میدهد و اگر مشاهده پذیر $\hat{B}$ اندازه گیری شود، با قطعیت ویژه مقدار b_k را به عنوان نتیجه اندازه گیری بدست میدهد و در هر دو مورد، حالت سامانه پس از اندازه گیری تغییر نمیکند و بنابراین مهم نیست کدامیک از مشاهده پذیرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را اول اندازه بگیریم.
□

به عنوان یک نتیجه ی فوری از نتیجه ی بالا داریم:

نتیجه: مشاهده پذیرهایی که جابجا نمیشوند را نمیتوان همزمان (با دقت دلخواه) اندازه گرفت.

یک حالت خاص از مشاهده پذیرهای همزمان، یک عملگر و تابعی از خودش است چراکه

$$\left[f(\hat{A}),\hat{A}\right] = 0\ . \qquad (۱۵۶.۳)$$

همچنین معکوس یک کمیت فیزیک $\hat{A}$ را با $\hat{A}^{-1}$ نشان میدهیم به قسمی که

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \mathbb{1}\ . \qquad (۱۵۷.۳)$$

واضح است که $\left[\hat{A},\hat{A}^{-1}\right] = 0$. همچنین داریم

$$\text{اگر}\quad \hat{A}\,|\phi_n\rangle = a_n\,|\phi_n\rangle \implies \hat{A}^{-1}\,|\phi_n\rangle = \frac{1}{a_n}\,|\phi_n\rangle\ . \qquad (۱۵۸.۳)$$

اگر دو مشهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ همزمان قابل اندازه گیری نباشند، مفهوم ضرب آنها، برخلاف حالت جابجاشونده ها، معنای مشخصی ندارد. این خود را اینجا نشان میدهد که حاصلضرب $\hat{A}\hat{B}$ هرمیتی نیست و بنابراین به هیچ مشاهده پذیر فیزیک مربوط نمیشود که به قضیه زیر منجر میشود:

[۳۷] حالتهایی هم میتوانند وجود داشته باشند که برای $j \neq k$ ویژه مقادیر a_j و a_k باهم برابر باشند. به این حالتها، حالتهای تبهگن گویند که در بخش (؟؟) بررسی میشود.

قضیه ۵.۳. عملگر $\hat{A}\hat{B}$ هرمیتی است اگر و تنها اگر $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$.

اثبات رفت: فرض کنیم $\hat{A}\hat{B}$ هرمیتی باشند، بنابراین:

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger}=\hat{A}\hat{B}\,. \tag{۱۵۹.۳}$$

از طرفی در حالت کلی میدانیم

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger}=\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}=\hat{B}\hat{A}\,. \tag{۱۶۰.۳}$$

و بنابراین $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$.

اثبات برگشت: فرض کنیم $\hat{A}$ و $\hat{B}$ باهم جابجا شوند، پس داریم:

$$\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}\,, \tag{۱۶۱.۳}$$

که با توجه به رابطه (۱۶۰.۳) داریم $\hat{A}\hat{B}=\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger}$ و بنابراین $\hat{A}\hat{B}$ هرمیتی است. □

میتوان براحتی دید که برای هر دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$، کمیت $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ پادهرمیتی است یعنی:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]^{\dagger}=\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^{\dagger}=\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}=-\left[\hat{A},\hat{B}\right]\,. \tag{۱۶۲.۳}$$

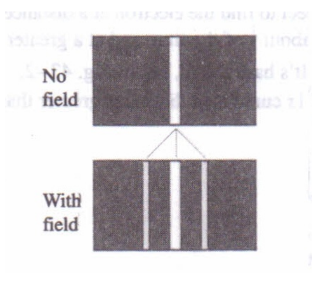
بنابراین کمیت

$$i\left[\hat{A},\hat{B}\right]\,, \tag{۱۶۳.۳}$$

حتما هرمیتی است.

۹.۳ تبهگنی

اگر اتم هیدروژن (یا هر اتم دیگری را) را تحت تاثیر میدان مغناطیسی قرار دهیم خواهیم دید که برخی خطوط طیفی، به دو یا چند خط طیفی شکافته میشوند. (شکل (۱۲.۳) را ببینید.) این بدین معناست که این خطوط طیفی، که هرکدام نمایشگر حالتهای کوانتومی متفاوتی است، قبل از روشن کردن میدان مغناطیسی دارای انرژیهای یکسانی بوده اند. به عبارتی با اندازه گیری انرژی نمیتوان فهمید که اتم در کدامیک از این حالتهای متفاوت است. این مثالی از حالتی است که به آن تبهگنی[۳۸] گوییم.



شکل ۱۲.۳: ....

اگر دو یا چند ویژه حالت متفاوت یک کمیت فیزیکی (عملگر هرمیتی) در آزمایش مقادیر یکسانی را به دست دهند، گوییم این حالتها تبهگن[۳۹] هستند. به تعداد این حالتها مرتبه ی تبهگنی گوییم. به عبارتی گاهی پیش می آید که هنگام اندازه گیری

[۳۸] degeneracy
[۳۹] degenerate

یک کمیت فیزیکی، برای چند ویژه حالت این کمیت، خروجی آزمایش یکسان میشود. یعنی چند ویژه کت متفاوت دارای ویژه مقادیر یکسانی هستند. در چنین حالتی با اندازه گیری کمیت مورد نظر، نمیتوانیم بگوییم سامانه در کدامیک از این ویژه حالتها قرار دارد. چنین حالتی را تبهگن گوییم و به تعداد این ویژه کتها مرتبه ی تبهگنی گوییم.

تبهگنی نتیجه ی **تقارن** در سامانه است. هرچه تقارن بیشتر باشد، مرتبه ی تبهگنی هم بالاتر است. به عبارتی، تبهگنی قبل از آنکه مفهومی کوانتومی یا فیزیکی باشد، مفهومی هندسی است. مثلا رئوس یک مربع بلحاظ هندسی با هم یکسانند یعنی اگر مربع را ۹۰ درجه بچرخانیم، اگرچه جای رئوس عوض میشود اما ناظر در شکل تغییری نمیبیند. در اینجا تبهگنی از مرتبه ی چهار است و برای دایره این تبهگنی از مرتبه ی بینهایت است.

به عنوان مثالی دیگر، در اتم هیدروژن تراز $n = 2$ با انرژی $E_2 = -3.4\ \mathrm{eV}$ متناظر با چهار حالت متفاوت است. به عبارتی چهار ویژه حالت متفاوت هامیلتونی دارای ویژه مقدار انرژی یکسانی هستند. و این بدین معناست که وقتی اندازه گیری انرژی مقدار $-3.4\ \mathrm{eV}$ را بدست میدهد، اگرچه معلوم میشود که الکترون در ترازی به جز $n = 2$ نیست، اما نمیتوان گفت که در کدامیک از چهار حالت متفاوتی است که برای همه ی آنها انرژی برابر $-3.4\ \mathrm{eV}$ است. پس این چهار تراز متفاوت باید حداقل در یک کمیت فیزیکی دیگر (در اینجا تکانه زاویه ای) دارای ویژه مقادیر متفاوت باشند، وگرنه ما با چهار تراز متفاوت روبرو نیستیم و عملا یک تراز داریم. نتیجتا این چهار تراز باید ویژه کتهای کمیت دوم (در اینجا تکانه ی زاویه ای) هم باشند. بنابراین این چهار تراز، ویژه حالتهای مشترک هامیلتونی و تکانه زاویه ای هستند که بدین معناست که در این سامانه عملگرهای هامیلتونی و تکانه ی زاویه ای باهم جابجا میشوند.

پس اگر با اندازه گیری کمیت $\hat{A}$، چند ویژه حالت متفاوت دارای ویژه مقدار یکسان a_n باشند، این بدان معنی است که با اندازه گیری $\hat{A}$ نمیتوانیم بفهمیم سامانه در کدامیک از این ویژه حالتهای تبهگن قرار دارد. بنابراین باید کمیت فیزیکی دیگری (مانند $\hat{B}$) وجود داشته باشد که این حالتهای تبهگن ویژه حالت آن هم بوده ولی ویژه مقادیر شان متفاوت باشد تا بتوان با اندازه گیری آن حالت سامانه را معین کرد.

علت اینکه باید کمیت $\hat{B}$ وجود داشته باشد این است که وقتی دو حالت کوانتومی متفاوت داریم (که ویژه مقدارشان برای کمیت $\hat{A}$ یکی است)، این تفاوت باید ناشی از تفاوت در ویژه مقدار کمیت دیگری مانند $\hat{B}$ باشد وگرنه اصولا حالت متفاوتی نیستند (و بنابراین مثلا در اتم هیدروژن با روشن کردن میدان مغناطیسی از هم جدا نمیشوند). اندازه گیری کمیت دوم $\hat{B}$ نباید حالت سامانه را تغییر دهد، چراکه اولا ویژگی $\hat{B}$ این است که قرار است ویژه مقدار دومی را معرفی کند که مقدارش برای ویژه کتهای تبهگن کمیت $\hat{A}$ متفاوت باشد تا بتوان حالت سامانه را تشخیص داد. ثانیا چون این حالتها ویژه حالت $\hat{B}$ هم هستند، پس اندازه گیری $\hat{B}$ آنها را عوض نمیکند. در نتیجه این حالتهای تبهگن، ویژه حالتهای همزمان عملگرهای هرمیتی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هستند و بنابراین طبق قضیه ۴.۳ عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ باهم جابجا میشوند. پس:

> اگر ویژه کتهای مشاهده پذیر $\hat{A}$ تبهگن باشند، حتما حداقل یک مشاهده پذیر دیگری مانند $\hat{B}$ وجود دارد که با $\hat{A}$ جابجا میشود و تبهگنی را کاهش میدهد یا از بین میبرد.

اگر تبهگنی با معرفی مشاهده پذیر $\hat{B}$ از بین برود بدین معناست که حالت سامانه ویژه حالت همزمان مشاهده پذیرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ است و با تعیین هردو ویژه مقدار a_i و b_j تعیین میشود. در این شرایط حالت سامانه را با ویژه مقدارهای مشاهده پذیرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ نشان داده یعنی $|\phi_n\rangle = |a_i, b_j\rangle$ و داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A}\,|a_i, b_j\rangle &= a_i\,|a_i, b_j\rangle\ , \\ \hat{B}\,|a_i, b_j\rangle &= b_j\,|a_i, b_j\rangle\ . \end{aligned} \tag{۱۶۴.۳}$$

گاهی اوقات با معرفی مشاهده پذیر دوم $\hat{B}$ اگرچه مرتبه ی تبهگنی کم میشود اما کاملا از بین نمیرود. یعنی همچنان برخی حالتهای تبهگن ویژه مقدارشان برای مشاهده پذیر دوم هم یکسان است. در این حالت بر اساس استدلال مشابه باید مشاهده پذیر سومی مانند $\hat{C}$ وجود داشته باشد که با مشاهده پذیرهای اول و دوم جابجا شود و ویژه مقدارش برای ویژه حالتهای تبهگن باقیمانده متفاوت باشد. به طریق مشابه ممکن است برای از بین بردن تبهگنی به مشاهده پذیرهای بیشتری نیاز داشته باشیم که همگی با هم دو به دو جابجا میشوند یعنی:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \left[\hat{A}, \hat{C}\right] = \left[\hat{B}, \hat{C}\right] = \cdots = 0\ . \tag{۱۶۵.۳}$$

به مجموعه ی این مشاهده پذیرها که با معرفی آنها تبهگنی کاملا از بین میرود مجموعه ی کامل عملگرهای دو بدو جابجا شونده [۴۰]

[۴۰] Complete Set of Commuting Operatos (CSCO)

یا به اختصار CSCO گوییم. وقتی همه ی این کمیتها را یافتیم، حالت سامانه با ویژه مقدار همه ی این کمیت ها تعیین میشود و بنابراین ویژه حالتهای سامانه ویژه حالت همه ی این کمیتها است:

$$\begin{aligned} \hat{A}\,|a_i, b_j, c_k, \cdots\rangle &= a_i\,|a_i, b_j, c_k, \cdots\rangle\ , \\ \hat{B}\,|a_i, b_j, c_k, \cdots\rangle &= b_j\,|a_i, b_j, c_k, \cdots\rangle\ , \cdots\ . \end{aligned} \tag{۱۶۶.۳}$$

در این حالت تبهگنی بطور کامل از بین رفته است چراکه هر دو ویژه حالت حداقل در ویژه مقدار یکی از این کمیتها با هم متفاوتند.

این مجموعه ی CSCO یکتا نیست. یعنی برای تعیین کردن حالت سامانه میتوان مجموعه های متفاوتی از مشاهده پذیرها را انتخاب کرد. بین این مجموعه ها ممکن است یک یا چند مشاهده پذیر مشترک باشند یا چند مشاهده پذیر آنها با هم جابجا شوند، اما حتما حداقل یک مشاهده شان با هم جابجا نمیشوند وگرنه در این صورت تمام مشاهده پذیرهای هر دو مجموعه با هم جابجا میشوند و عملا تشکیل یک CSCO را میدهند که با فرض داشتن دو مجموعه ی CSCOی متفاوت در تناقض است.

به عنوان مثال:

۱. برای یک ذره ی بدون اسپین[۴۱] در فضای یک بعدی، عملگر مکان $\hat{X}$ به تنهایی توصیف کننده ی حالت آن است و تشکیل یک CSCO را میدهد. همچنین عملگر تکانه ی خطی $\hat{P}_x$ یک CSCO معادل است و در فصول آینده خواهیم دید که $\left[\hat{X}, \hat{P}_x\right] \neq 0$ که قابل انتظار است.

۲. در سه بعد برای یک ذره بدون اسپین مجموعه ی مشاهده پذیرهای $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ تشکیل یک CSCO میدهند و معادل آنها مجموعه ی $\{\hat{P}_x, \hat{P}_x, \hat{P}_z\}$ است.

۳. برای اتم هیدروژن بدون اسپین مجموعه ی $\{\hat{H}, \hat{L^2}, \hat{L}_z\}$ یا معادل آن $\{\hat{H}, \hat{L^2}, \hat{L}_x\}$ یا $\{\hat{H}, \hat{L^2}, \hat{L}_x\}$ هرکدام یک CSCO هستند.

اگر CSCO فقط یک عضو داشته باشد بدین معناست که سامانه از ابتدا تبهگنی نداشته است.

۱۰.۳ روابط عدم قطعیت

۱۱.۳ عملگر زمان

[۴۱] اسپین را در فصلهای بعد معرفی خواهیم کرد و دانستن آن در اینجا نیازی نیست. علت تاکید بر بدون اسپین بودن ذره جهت کامل بودن بحث است و ندانستن آن تاثیری در فهم مثال ندارد.

فصل ۴

مکانیک ماتریسی

در فصل قبل اصول موضوعه ی مکانیک کوانتومی را معرفی کردیم. زبان بیان این اصول بردارهای کت در فضای هیلبرت بود. دو صورت بندی معادل دیگر از مکانیک کوانتومی وجود دارد که همزمان با صورت بندی برا و کت ساخته شدند. یکی صورت بندی ماتریسی و دیگری صورت بندی تابع موج که اولی توسط هایزنبرگ و دومی توسط شرودینگر معرفی شدند. در این فصل به معرفی صورت بندی ماتریسی میپردازیم و فصل بعد به مکانیک موجی اختصاص دارد.

۱.۴ نمایش ماتریسی

مشاهده پذیر $\hat{A}$ را در نظر بگیرید که ویژه مقادیر آن a_i و ویژه کتهای متناظر با آن $|\phi_i\rangle$ است. از آنجا که این ویژه کتها تشکیل یک مجموعه کامل میدهند میتوانند پایه های فضای هیلبرت باشند و به عبارتی هر کت دلخواه $|\psi\rangle$ را میتوانیم بر حسب آنها بسط دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \, |\phi_i\rangle \ . \qquad (۱.۴)$$

ضریب بسط c_i دامنه ی احتمال این است که از اندازه گیری $\hat{A}$ روی حالت $|\psi\rangle$ مقدار a_i را برای آن بدست آوریم که بدین معناست که حالت سامانه به $|\phi_i\rangle$ فروکاسته شده است و از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$c_i = \langle \phi_i | \psi \rangle \ . \qquad (۲.۴)$$

بنابراین احتمال مربوطه برابر است با

$$\Pr(\psi \to \phi_i) = |c_i|^2 = |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 \ . \qquad (۳.۴)$$

واضح است آنچه در نهایت معنای فیزیکی دارد ضرایب بسط هستند و به عبارتی با دانستن ضرایب بسط c_i کت $|\psi\rangle$ مشخص میشود. چراکه برای ساختن آن کافیست هر ضریب بسط را در کت پایه مربوطه ضرب کرده و همه را با هم جمع کنیم. بنابراین مجموعه ی c_iها مشخص کننده ی کت $|\psi\rangle$ هستند که میتوانیم آنها را در یک ماتریس ستونی به شکل زیر مرتب کنیم:

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \ . \qquad (۴.۴)$$

بنابراین به نتیجه ی زیر میرسیم:

در مکانیک ماتریسی، کتها را با ماتریسهای ستونی نمایش میدهیم که بعد ماتریس بعد فضای هیلبرت است.

در اینجا باید به دو نکته توجه داشت:

۱. کت با ماتریس برابر نیست و این ماتریس تنها یک **نمایش**[۱] از کت $|\psi\rangle$ است. علامت نقطه بالای تساوی هم بیانگر همین معناست.

۲. در پایه های مختلف، ضرایب بسط $|\psi\rangle$ و در نتیجه نمایش ماتریسی آن هم متفاوت است. مانند مولفه های یک بردار که در دستگاههای مختصات مختلف متفاوت است.

میتوان حدس زد که براها را باید با ماتریسهای سطری نمایش داد. بدین منظور از رابطه ی (۱.۴) داریم:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i^* c_i \tag{۵.۴}$$

که عددی حقیقی (و مثبت) است. واضح است برای اینکه ضرب داخلی نمایش ماتریسی $\langle\psi|$ در $|\psi\rangle$ قابل انجام بوده و نتیجه اش عددی حقیقی باشد باید اولا نمایش ماتریسی $|\psi\rangle$ سطری بوده و ثانیا آرایه های آن مزدوج مختلط آرایه های نمایش ماتریسی $|\psi\rangle$ باشند، یعنی:

$$\langle\psi| \doteq \begin{pmatrix} c_1^*, & c_2^*, & \cdots, & c_N^* \end{pmatrix} . \tag{۶.۴}$$

بنابراین:

در مکانیک ماتریسی، براها را با ماتریسهای سطری نمایش میدهیم که بعد ماتریس بعد فضای هیلبرت است.

میتوان براحتی وارسی کرد که ضرب نمایشهای ماتریسی (۴.۴) در (۶.۴) به نتیجه ی (۵.۴) منتج میشود.

برای اینکه ببینیم نمایش ماتریسی عملگر چیست به تعریف عملگر توجه میکنیم که از اثر در یک کت، آنرا به کت دیگری نظیر میکند:

$$\hat{\mathcal{O}}\,|\psi\rangle = |\chi\rangle \ . \tag{۷.۴}$$

از آنجا که کت را با ماتریس ستونی نمایش میدهیم لازم است که نمایش ماتریسی عملگر یک ماتریس مربعی باشد تا ضرب بالا در نمایش ماتریسی قابل انجام باشد. برای بررسی بیشتر عملگر دلخواه $\hat{\mathcal{O}}$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعه ی $\{|\phi_i\rangle\}$ پایه های فضا باشند داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}} &= \mathbb{1}\hat{\mathcal{O}}\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\,\hat{\mathcal{O}} \sum_{j=1}^{N} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \langle\phi_i|\hat{\mathcal{O}}|\phi_j\rangle\,|\phi_i\rangle\langle\phi_j| = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{ij}\,|\phi_i\rangle\langle\phi_j| \ , \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

که در آن $\mathcal{O}_{ij} = \langle\phi_i|\hat{\mathcal{O}}|\phi_j\rangle$ عددی مختلط و $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$ عملگر است. از آنجا که دانستن $\mathcal{O}_{ij}$ها عملگر $\hat{\mathcal{O}}$ را در پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$ معلوم میکند، با توجه به دو اندیس i, j میتوانیم آنها را در ماتریسی با دو آرایه ی سطر i و ستون j یا همان ماتریس مربعی به شکل زیر مرتب کنیم:

$$\hat{\mathcal{O}} \doteq \begin{pmatrix} \langle\phi_1|\hat{\mathcal{O}}|\phi_1\rangle & \langle\phi_1|\hat{\mathcal{O}}|\phi_2\rangle & \cdots & \langle\phi_1|\hat{\mathcal{O}}|\phi_N\rangle \\ \langle\phi_2|\hat{\mathcal{O}}|\phi_1\rangle & \langle\phi_2|\hat{\mathcal{O}}|\phi_2\rangle & \cdots & \langle\phi_2|\hat{\mathcal{O}}|\phi_N\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\phi_N|\hat{\mathcal{O}}|\phi_1\rangle & \langle\phi_N|\hat{\mathcal{O}}|\phi_2\rangle & \cdots & \langle\phi_N|\hat{\mathcal{O}}|\phi_N\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11} & \mathcal{O}_{12} & \cdots & \mathcal{O}_{1N} \\ \mathcal{O}_{21} & \mathcal{O}_{22} & \cdots & \mathcal{O}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}_{N1} & \mathcal{O}_{N2} & \cdots & \mathcal{O}_{NN} \end{pmatrix} . \tag{۹.۴}$$

بنابراین:

[۱] representation

در مکانیک ماتریسی، عملگرها را با ماتریسهای مربعی نمایش میدهیم که بعد ماتریس بعد فضای هیلبرت است.

تمرین ۱۱.۴. نمایش ماتریسی عملگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ را با فرض اینکه بسط $|\psi\rangle$ در پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$ برابر $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\,|\phi_i\rangle$ باشد بدست آورید. $\square$

نکته: با بررسی نمایش ماتریسی کت، برا و عملگر مشخص میشود که چرا ترکیبهای $|\phi\rangle\,|\psi\rangle$ و $\langle\phi|\,\langle\psi|$ ممنوع است. چراکه بلحاظ ابعاد ماتریسی، نمایش ماتریسی آنها قابل ضرب شدن در یکدیگر نیستند.

نکته: بین $|\psi\rangle^*$، $|\psi\rangle^T$ و $|\psi\rangle^\dagger$ تفاوت است. $|\psi\rangle^*$ همچنان یک کت است در حالیکه $|\psi\rangle^T$ و $|\psi\rangle^\dagger$ برا هستند. بخصوص $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$.

همیوغ هرمیتی

برای بدست آوردن نمایش ماتریسی همیوغ هرمیتی عملگر $\hat{\mathcal{O}}$، براکت $\langle\chi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle$ را در نظر میگیریم. فرض کنید بسط کتهای $|\psi\rangle$ و $|\chi\rangle$ در پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$ بصورت زیر باشد:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_j\,|\phi_j\rangle\ ,\qquad |\chi\rangle = \sum_{i=1}^{N} d_i\,|\phi_i\rangle\ . \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین

$$\langle\chi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_i^* c_j\,\langle\phi_i|\hat{\mathcal{O}}|\phi_j\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_i^* c_j \mathcal{O}_{ij} \tag{۱۱.۴}$$

همیوغ هرمیتی عبارت بالا برابر است با

$$\Big(\langle\chi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle\Big)^* = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_i c_j^* \mathcal{O}_{ij}^*\ . \tag{۱۲.۴}$$

از طرفی این همیوغ هرمیتی را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\Big(\langle\chi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle\Big)^* = \langle\psi|\hat{\mathcal{O}}^\dagger|\chi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_i c_j^*\,\langle\phi_j|\hat{\mathcal{O}}^\dagger|\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_i c_j^* \mathcal{O}_{ji}^\dagger\ . \tag{۱۳.۴}$$

با مقایسه ی دو رابطه ی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) داریم $\mathcal{O}_{ij}^* = \mathcal{O}_{ji}^\dagger$، که بدین معناست که برای بدست آوردن $\hat{\mathcal{O}}^\dagger$ باید علاوه بر اینکه در ماتریس[۲] $\hat{\mathcal{O}}$ جای سطر و ستون را عوض میکنیم، از آرایه ها همیوغ مختلط بگیریم، یعنی:

$$\hat{\mathcal{O}}^\dagger = \left(\hat{\mathcal{O}}^T\right)^*\ . \tag{۱۴.۴}$$

بنابراین

$$\hat{\mathcal{O}}^\dagger \doteq \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11}^* & \mathcal{O}_{21}^* & \cdots & \mathcal{O}_{N1}^* \\ \mathcal{O}_{12}^* & \mathcal{O}_{22}^* & \cdots & \mathcal{O}_{N2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}_{1N}^* & \mathcal{O}_{2N}^* & \cdots & \mathcal{O}_{NN}^* \end{pmatrix}\ . \tag{۱۵.۴}$$

با توجه به روابطی که بین آرایه های ماتریس عملگرها وجود دارد میتوان انواعی از ماتریسها را رده بندی کرد که در زیر بیان میشود.

ماتریس دلخواه $\hat{A}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس

[۲] از این به بعد برای اختصار کلمه ی نمایش را حذف میکنیم و هرجا از ماتریس یک عملگر نام بردیم منظور نمایش ماتریسی آن است.

۱. حقیقی است اگر $\hat{A}^* = \hat{A}$ یا $A^*_{ij} = A_{ij}$.

۲. موهومی است اگر $\hat{A}^* = -\hat{A}$ یا $A^*_{ij} = -A_{ij}$.

۳. متقارن است اگر $\hat{A}^T = \hat{A}$ یا $A_{ij} = A_{ji}$.

۴. پادمتقارن است اگر $\hat{A}^T = -\hat{A}$ یا $A_{ij} = -A_{ji}$.

۵. هرمیتی است اگر $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ یا $A^*ji = A_{ij}$.

۶. پادهرمیتی است اگر $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$ یا $A^*_{ji} = -A_{ij}$.

۷. متعامد است اگر $\hat{A}^T = \hat{A}^{-1}$ یا $\hat{A}\hat{A}^T = \hat{A}^T\hat{A} = \mathbb{1}$ یا $\left(\hat{A}\hat{A}^T\right)_{ij} = \left(\hat{A}^T\hat{A}\right)_{ij} = \delta_{ij}$.

۸. یکانی است اگر $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$ یا $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \mathbb{1}$ یا $\left(\hat{A}\hat{A}^\dagger\right)_{ij} = \left(\hat{A}^\dagger\hat{A}\right)_{ij} = \delta_{ij}$.

رد عملگر

جمع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس را رد[۳] آن گویند:

$$\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{O}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{ii} \tag{۱۶.۴}$$

رد عملگر دارای ویژگی های زیر است:

$$\mathrm{tr}\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \mathrm{tr}\left(\hat{A}\right) + \mathrm{tr}\left(\hat{B}\right)\,, \quad \mathrm{tr}\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \mathrm{tr}\left(\hat{B}\hat{A}\right)\,, \quad \mathrm{tr}\left(c\hat{A}\right) = c\,\mathrm{tr}\left(\hat{A}\right)\,. \tag{۱۷.۴}$$

۲.۴ تبدیل پایه

بردار مکان $\mathbf{r}$ را در نظر بگیرید. این بردار در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ نوشته میشود. در اینجا پایه های فضا مجموعه ی $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ است. حال میتوان همین بردار مکان $\mathbf{r}$ را در دستگاه مختصات قطبی کروی به صورت $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ نوشت. در این حالت پایه های فضا مجموعه ی $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ است. در اینجا بیان بردار مکان $\mathbf{r}$ را از دستگاه مختصات دکارتی به دستگاه مختصات قطبی کروی برده ایم. به عبارتی پایه های فضا را از مجموعه ی $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ به مجموعه ی $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ تبدیل کرده ایم. چنین فرآیندی را **تبدیل پایه**[۴] گوییم.

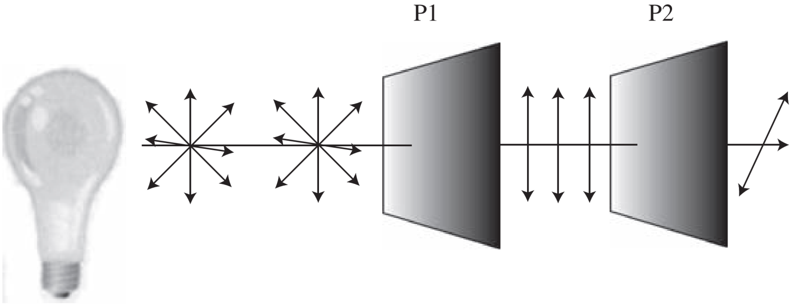
حال یک فضای هیلبرت را در نظر بگیرید. در این فضا، یک کت نوعی $|\psi\rangle$ را میتوان بر حسب پایه های متفاوتی بسط داد. سوال این است که رابطه ی بین این پایه ها چیست؟ برای معلوم شدن مفهوم فیزیکی این مسئله از ویژگی قطبش نور به عنوان ابزاری برای بررسی بیشتر حالتهای کوانتومی استفاده میکنیم.

سامانه ای مطابق شکل (۱.۴) را در نظر بگیرید. نور خروجی از لامپ ناقطبیده است، یعنی میدان الکتریکی در همه ی جهات عمود بر انتشار نوسان میکند. حال اگر قطبنده ی P1 را در مسیر نور قرار دهیم، فقط اجازه ی عبور میدانهای در جهت عمودی را میدهد. در این حالت نوری با قطبش عمودی و البته با شدت کمتر از قطبنده ی P1 خارج خواهد شد. در حقیقت برخی فوتونها از P1 عبور میکنند و برخی عبور نمیکنند.

حالت کوانتومی فوتونها با قطبش عمودی را با کت $|v\rangle$ نشان میدهیم. به همین ترتیب اگر P1 را ۹۰ درجه بچرخانیم، فوتونهای خروجی قطبش افقی خواهند داشت و حالت آنها را با کت $|h\rangle$ نشان میدهیم. اصل برهمنهی به ما میگوید که حالت کلی قطبش فوتون را میتوانیم بصورت ترکیب خطی از کتهای متعامد $|h\rangle$ و $|v\rangle$ بنویسیم:

$$|\psi\rangle = c_h\,|h\rangle + c_v\,|v\rangle\ , \tag{۱۸.۴}$$

[۳] trace
[۴] change of basis



شکل ۱.۴: ....

که داریم

$$c_h = \langle h|\psi\rangle \ , \quad c_v = \langle v|\psi\rangle \ . \tag{۱۹.۴}$$

واضح است که فضای هیلبرت قطبش فوتون ۲ بعدی است.

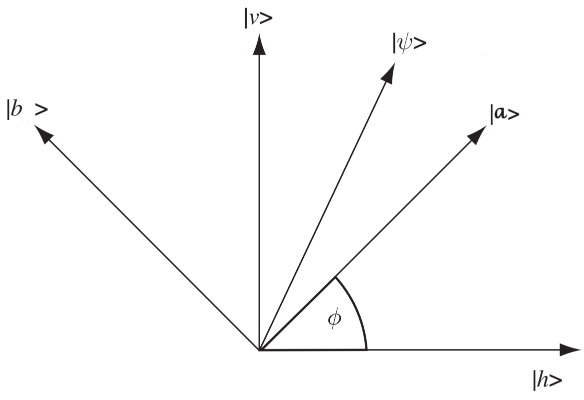
قطبنده ی P2 نور را در راستای دیگری مثل $|a\rangle$ که نسبت به راستای $|h\rangle$ زاویه ی ϕ دارد قطبیده میکند. بنابراین اگر P2 را ۹۰ درجه بچرخانیم، نور در راستای عمود بر $|a\rangle$ که آنرا $|b\rangle$ مینامیم قطبیده میشود. کتهای $|a\rangle$ و $|b\rangle$ هم میتوانند پایه هایی برای این فضای هیلبرت باشند. یعنی هر کت قطبش دلخواه را میتوانیم بر حسب کتهای پایه ی $|a\rangle$ و $|b\rangle$ بنویسیم:

$$|\psi\rangle = c_a\,|a\rangle + c_b\,|b\rangle \ , \tag{۲۰.۴}$$

به قسمی که

$$c_a = \langle a|\psi\rangle \ , \quad c_b = \langle b|\psi\rangle \ . \tag{۲۱.۴}$$

بنابراین برای بیان قطبش دو پایه ی متفاوت $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$ و $\{|a\rangle\,,|b\rangle\}$ را استفاده کرده ایم که مطابق شکل (۲.۴) نسبت به یکدیگر به اندازه ی زاویه ی ϕ دوران یافته اند. واضح است که هرکدام از این دو پایه ویژگیهای راست هنجاری و تمامیت را دارا



شکل ۲.۴: ....

هستند:

$$\{|h\rangle\,,|v\rangle\}:\begin{cases}\langle h|h\rangle = \langle v|v\rangle = 1\ ,\\ \langle v|h\rangle = \langle h|v\rangle = 0\ ,\\ |h\rangle\langle h| + |v\rangle\langle v| = \mathbb{1}\ .\end{cases}\qquad \{|a\rangle\,,|b\rangle\}:\begin{cases}\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1\ ,\\ \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0\ ,\\ |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = \mathbb{1}\ .\end{cases} \tag{۲۲.۴}$$

حال سوال این است که چگونه یک حالت قطبش دلخواه $|\psi\rangle$ را که در پایه قدیم (مثلا $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$) نوشته شده است را در پایه های جدید بنویسیم؟ به عبارتی: قانون تبدیل پایه ها چیست؟ چگونه از یک پایه به پایه ی دیگر برویم؟ برای این منظور از روابط تمامیت استفاده میکنیم:

$$|h\rangle = \mathbb{1}\,|h\rangle = \Big(\,|a\rangle\!\langle a| + |b\rangle\!\langle b|\,\Big)\,|h\rangle\ . \tag{۲۳.۴}$$

بنابراین داریم

$$|h\rangle = \Big(\,\langle a|h\rangle\,\Big)\,|a\rangle + \Big(\,\langle b|h\rangle\,\Big)\,|b\rangle\ , \tag{۲۴.۴}$$

و به همین ترتیب برای $|v\rangle$ داریم

$$|v\rangle = \Big(\,\langle a|v\rangle\,\Big)\,|a\rangle + \Big(\,\langle b|v\rangle\,\Big)\,|b\rangle\ . \tag{۲۵.۴}$$

میتوانیم روابط (۲۴.۴) و (۲۵.۴) را بصورت زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix}|a\rangle\\|b\rangle\end{pmatrix} = \hat{U}\begin{pmatrix}|h\rangle\\|v\rangle\end{pmatrix}\ , \tag{۲۶.۴}$$

که در آن ماتریس $\hat{U}$ بصورت زیر است:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix}\langle h|a\rangle & \langle v|a\rangle\\ \langle h|b\rangle & \langle v|b\rangle\end{pmatrix}\ . \tag{۲۷.۴}$$

حال از روابط (۲۴.۴) و (۲۵.۴) برای کت قطبش دلخواه $|\psi\rangle$ داریم:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= c_h\,|h\rangle + c_v\,|v\rangle\\
&= c_h\Big[\big(\,\langle a|h\rangle\,\big)\,|a\rangle + \big(\,\langle b|h\rangle\,\big)\,|b\rangle\Big] + c_v\Big[\big(\,\langle a|v\rangle\,\big)\,|a\rangle + \big(\,\langle b|v\rangle\,\big)\,|b\rangle\Big]\\
&= \Big(c_h\,\langle a|h\rangle + c_v\,\langle a|v\rangle\Big)\,|a\rangle + \Big(c_h\,\langle b|h\rangle + c_v\,\langle b|v\rangle\Big)\,|b\rangle\\
&= c_a\,|a\rangle + c_b\,|b\rangle\ .
\end{aligned} \tag{۲۸.۴}$$

از اینجا روابط بین ضرایب بسط در پایه های قدیم ($|h\rangle\,,|v\rangle$) و پایه های جدید ($|a\rangle\,,|b\rangle$) واضح است که میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix}c_a\\c_b\end{pmatrix} = \hat{U}\begin{pmatrix}c_h\\c_v\end{pmatrix}\ , \tag{۲۹.۴}$$

که در آن ماتریس تبدیل $\hat{U}$ از قرار زیر است:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix}\langle a|h\rangle & \langle a|v\rangle\\ \langle b|h\rangle & \langle b|v\rangle\end{pmatrix}\ . \tag{۳۰.۴}$$

ماتریس $\hat{U}$ ماتریسی یکانی است یعنی $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$. یکانی بودن $\hat{U}$ بقای احتمال را تضمین میکند. به عبارتی بهجارش $|\psi\rangle$ در پایه های قدیم و جدید به هم نمیخورد.

تمرین ۱۲.۴. ثابت کنید ماتریس (۳۰.۴) یکانی است. □

تمرین ۱۳.۴. با توجه به شکل (۲.۴) ثابت کنید اگر پایه های $|a\rangle\,,|b\rangle$ نسبت به $|h\rangle\,,|v\rangle$ به اندازه ی ϕ چرخیده باشند داریم

$$\hat{U} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\ . \tag{۳۱.۴}$$

به عبارتی در حالتی که بعد فضای هیلبرت محدود باشد، تغییر پایه را میتوان با دوران محورها در فضای هیلبرت نمایش داد. □

حالت دو بعدی بالا را میتوان به ابعاد دلخواه تعمیم داد. یعنی اگر بسط $|\psi\rangle$ در فضای هیلبرت با پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$ از قرار زیر باشد:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_j \, |\phi_j\rangle \ , \tag{۳۲.۴}$$

میتوان $|\psi\rangle$ را در پایه های متفاوتی مثل $\{|\phi'_i\rangle\}$ بسط داد که داریم:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N} c'_j \, |\phi'_j\rangle \ . \tag{۳۳.۴}$$

در اینجا c_jها ضرایب بسط در پایه های قدیم و c'_jها ضرایب بسط در پایه های جدید هستند. برای اینکه این ضرایب را بر حسب هم بدست آوریم کت $|\psi\rangle$ را ابتدا در پایه های قدیم به شکل زیر مینویسیم:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{j=1}^{N} c_j \, |\phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1} \, |\phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\sum_{i=1}^{N} |\phi'_i\rangle\langle\phi'_i| \right) |\phi_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle\phi'_i|\phi_j\rangle \, c_j \, |\phi'_i\rangle \ . \end{aligned} \tag{۳۴.۴}$$

با معرفی

$$U_{ij} = \langle\phi'_i|\phi_j\rangle \tag{۳۵.۴}$$

داریم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} c_j \, |\phi'_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} U_{ij} c_j \right) |\phi'_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c'_i \, |\phi'_i\rangle \ , \tag{۳۶.۴}$$

که بدین معناست که:

$$c'_i = \sum_{j=1}^{N} U_{ij} c_j \ , \tag{۳۷.۴}$$

یا به عبارتی

$$c_i^{(\mathrm{new})} = \sum_{j=1}^{N} U_{ij} c_j^{(\mathrm{old})} \ . \tag{۳۸.۴}$$

واضح است U_{ij}ها عناصر ماتریس تبدیل $\hat{U}$ هستند یعنی

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \cdots & U_{NN} \end{pmatrix} \ . \tag{۳۹.۴}$$

تمرین ۱۴.۴. نشان دهید ماتریس تبدیل (۳۹.۴) یکانی است. □

۱.۲.۴ تبدیلهای کت، برا و عملگر

برای کت $|\psi\rangle$، ضرایب بسط در پایه های قدیم برابر $c_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$ و در پایه های جدید برابر $c'_i = \langle\phi'_i|\psi\rangle$ است. بنابراین بسط $|\psi\rangle$ در پایه جدید برابر است با

$$|\psi\rangle_{new} = \sum_{i=1}^{N} c'_i \,|\phi'_i\rangle \ . \tag{۴۰.۴}$$

حال برای c'_iها داریم

$$\begin{aligned} c'_i &= \langle\phi'_i|\psi\rangle = \langle\phi'_i|\mathbb{1}|\psi\rangle = \langle\phi'_i|\Big(\sum_{j=1}^{N}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\Big)|\psi\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N}\langle\phi'_i|\phi_j\rangle\,\langle\phi_j|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N}U_{ij}\,\langle\phi_j|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{N}U_{ij}c_j \ . \end{aligned} \tag{۴۱.۴}$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \cdots & U_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} , \tag{۴۲.۴}$$

که بیانگر این است که نمایش ماتریسی کت $|\psi\rangle$ در پایه های قدیم و جدید بصورت زیر به هم مرتبط است:

$$|\psi\rangle_{new} = \hat{U}\,|\psi\rangle_{old} \ . \tag{۴۳.۴}$$

به همین ترتیب برای براها داریم:

$$\langle\psi|_{new} = \langle\psi|_{old}\,\hat{U}^\dagger \ . \tag{۴۴.۴}$$

برای اینکه بفهمیم نمایش ماتریسی عملگرها هنگام تبدیل پایه چگونه تغییر میکند داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{ij} &= \big\langle\phi'_i\big|\hat{\mathcal{O}}\big|\phi'_j\big\rangle = \big\langle\phi'_i\big|\mathbb{1}\hat{\mathcal{O}}\mathbb{1}\big|\phi'_j\big\rangle \\ &= \big\langle\phi'_i\big|\Big(\sum_{m=1}^{N}|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\Big)\hat{\mathcal{O}}\Big(\sum_{n=1}^{N}|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\Big)\big|\phi'_j\big\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}U_{im}\mathcal{O}_{mn}U^*_{jn} \ , \end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

و بنابراین

$$\hat{\mathcal{O}}_{new} = \hat{U}\hat{\mathcal{O}}_{old}\hat{U}^\dagger \ , \tag{۴۶.۴}$$

و به همین ترتیب

$$\hat{\mathcal{O}}_{old} = \hat{U}^\dagger\hat{\mathcal{O}}_{new}\hat{U} \ . \tag{۴۷.۴}$$

تمرین ۱۵.۴. ثابت کنید عملگر $\hat{U} = \sum_{n=1}^{N}|\phi'_n\rangle\langle\phi_n|$ ماتریس تغییر پایه از $\{|\phi_i\rangle\}$ به $\{|\phi'_i\rangle\}$ است. □

تمرین ۱۶.۴. ثابت کنید $\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{O}}\right)$ تحت تبدیل پایه ناورداست. □

دو مجموعه کامل $\{|\phi_i\rangle\}$ و $\{|\phi'_i\rangle\}$ را در نظر بگیرید که هرکدام میتوانند پایه های فضای هیلبرت باشند. نمایش ماتریسی یک کت، برا یا یک عملگر دلخواه در این دو پایه متفاوت است. مثلا عناصر ماتریس $\hat{\mathcal{O}}$ در پایه ی $\{|\phi_i\rangle\}$ برابر $\mathcal{O}_{ij} = \langle\phi_i|\hat{\mathcal{O}}|\phi_j\rangle$ و در پایه ی $\{|\phi'_i\rangle\}$ برابر $\mathcal{O}'_{ij} = \left\langle\phi'_i\middle|\hat{\mathcal{O}}\middle|\phi'_j\right\rangle$ است. به عبارتی ماتریسهای

$$\hat{\mathcal{O}} \doteq \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11} & \mathcal{O}_{12} & \cdots & \mathcal{O}_{1N} \\ \mathcal{O}_{21} & \mathcal{O}_{22} & \cdots & \mathcal{O}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}_{N1} & \mathcal{O}_{N2} & \cdots & \mathcal{O}_{NN} \end{pmatrix} \;,\quad \text{و} \quad \hat{\mathcal{O}} \doteq \begin{pmatrix} \mathcal{O}'_{11} & \mathcal{O}'_{12} & \cdots & \mathcal{O}'_{1N} \\ \mathcal{O}'_{21} & \mathcal{O}'_{22} & \cdots & \mathcal{O}'_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O}'_{N1} & \mathcal{O}'_{N2} & \cdots & \mathcal{O}'_{NN} \end{pmatrix} \;, \tag{۴۸.۴}$$

اگرچه با هم یکی نیستند اما هردو نمایش دهنده ی عملگر $\hat{\mathcal{O}}$ هستند. به همین ترتیب برای کت دلخواه $|\psi\rangle$ هر دو نمایش ماتریسی

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \;,\quad \text{و} \quad |\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_N \end{pmatrix} \;, \tag{۴۹.۴}$$

که در آنها $c_i = \langle\phi_i|\psi\rangle$ و $c'_i = \langle\phi'_i|\psi\rangle$، اگرچه دارای آرایه های متفاوتند اما با هم معادلند.

حال فرض کنید پایه های فضا، $\{|\phi_i\rangle\}$، ویژه کتهای مشاهده پذیر $\hat{A}$ باشند. در این حالت نمایش ماتریسی $\hat{A}$ بسیار ساده خواهد بود. قضیه ی مهم زیر این موضوع را روشن میکند.

قضیه ۶.۴. نمایش ماتریسی یک عملگر در پایه هایی که ویژه کتهای آن عملگر هستند اولا قطریست و ثانیا عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیر هستند.

اثبات: فرض کنیم ویژه کتهای عملگر هرمیتی $\hat{A}$ پایه های فضا هستند و در معادله ی ویژه مقداری زیر صدق میکنند:

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle = a_i\,|\phi\rangle \;. \tag{۵۰.۴}$$

حال آرایه های نمایش ماتریسی $\hat{A}$ از قرار زیر است:

$$A_{ij} = \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle = a_j\delta_{ij} \tag{۵۱.۴}$$

که بوضوح نشان میدهد عناصری که روی قطر اصلی نیستند ($i \neq j$) برابر صفر و عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیر a_i هستند. □

نتیجه: اگر نمایش ماتریسی یک مشاهده پذیر قطری بود، بدین معناست که اولا پایه های فضا ویژه کتهای همان مشاهده پذیر است و ثانیا عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیر هستند.

همچنین نمایش ماتریسی ویژه کتهای $\{|\phi_i\rangle\}$ وقتی خودشان پایه های فضا هستند بسیار ساده خواهد بود. مثلا نمایش ماتریسی $|\phi_1\rangle$ از قرار زیر است:

$$|\phi_1\rangle = \mathbb{1}\,|\phi_1\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\,|\phi_1\rangle = \sum_{i=1}^{N} \delta_{1i}\,|\phi_i\rangle \;, \tag{۵۲.۴}$$

و بنابراین

$$|\phi_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \vdots \\ \delta_{1N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;. \tag{۵۳.۴}$$

به همین ترتیب

$$|\phi_2\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \ , \cdots , \ |\phi_N\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \ . \tag{۵۴.۴}$$

گاهی اوقات ممکن است در مجموعه پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$، تعدادی از آنها ویژه کت مشاهده پذیر $\hat{A}$ باشند و برخی دیگر نباشند. در این حالت، نمایش ماتریسی آن دسته از ویژه کتهای $\hat{A}$ که عضو مجموعه پایه های فضا هستند بصورت ساده ی $(0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)^T$ خواهد بود که همه ی آرایه های آن بجز یکی صفر است. ولی بقیه ی ویژه کتها چنین نمایش ساده ای ندارند و حداقل دو آرایه ی آنها غیر صفر است. همچنین اگر سطر و ستون آرایه ای روی قطر اصلی ماتریس $\hat{A}$ همگی صفر باشند، آن آرایه ویژه مقدار $\hat{A}$ است و ویژه کت متناظر با آن نمایش ساده ی فوق را دارد که همه ی آرایه های آن بجز یکی صفر هستند.

۳.۴ حل معادلات ویژه مقداری

مهمترین معادله ویژه مقداری، معادله ی شرودینگر مستقل از زمان است:

$$\hat{H}\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle \ , \tag{۵۵.۴}$$

که E_nها انرژی سامانه و $|\psi_n\rangle$ ها ویژه حالتهای متناظر هستند. با داشتن نمایش ماتریسی هامیلتونی سامانه، با حل معادله ی بالا میتوانیم ترازهای انرژی E_n و حالتهای متناظر $|\psi_n\rangle$ را بیابیم. البته مسئله حل معادلات ویژه مقداری محدود به حل معادله شرودینگر مستقل از زمان نمیشود و برای هر مشاهده پذیر $\hat{A}$ با معادله ی ویژه مقداری

$$\hat{A}\,|a_n\rangle = a_n\,|a_n\rangle \ , \tag{۵۶.۴}$$

برقرار است که در اینجا برای اختصار هر ویژه کت را با ویژه مقدارش نشان گذاری کرده ایم.

برای اینکه بصورت کلی و برای مشاهده پذیر دلخواه $\hat{A}$ بتوانیم این مسئله را حل کنیم، فرض میکنیم پایه های فضا مجموعه ی $\{|\phi_i\rangle\}$ است که لزوما ویژه کتهای مشاهده پذیر $\hat{A}$ نیستند. بنابراین نمایش ماتریسی $\hat{A}$ در این پایه ها قطری نیست. هدف، یافتن ویژه مقادیر a_n و ویژه کتهای متناظر آنها یعنی $|a_n\rangle$ است. بدین منظور با نوشتن معادله ی (۵۶.۴) در پایه های $\{|\phi_i\rangle\}$ شروع میکنیم:

$$\hat{A}\mathbb{1}\,|a_n\rangle = a_n\mathbb{1}\,|a_n\rangle \ \Rightarrow\ \hat{A}\Big(\sum_{j=1}^{N}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\Big)\,|a_n\rangle = a_n\Big(\sum_{j=1}^{N}|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\Big)\,|a_n\rangle \ . \tag{۵۷.۴}$$

با ضرب عبارت بالا از چپ در $\langle\phi_i|$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle\,\langle\phi_j|a_n\rangle = a_n\sum_{j=1}^{N}\langle\phi_i|\phi_j\rangle\,\langle\phi_j|a_n\rangle \ , \tag{۵۸.۴}$$

که با قرار دادن $A_{ij} = \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle$ و $c_j^n = \langle\phi_j|a_n\rangle$ داریم

$$\sum_{j=1}^{N}A_{ij}c_j^n = a_n\sum_{j=1}^{N}\delta_{ij}c_j^n \ , \tag{۵۹.۴}$$

که میتواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\sum_{j=1}^{N}\big(A_{ij} - a_n\delta_{ij}\big)c_j^n = 0 \ . \tag{۶۰.۴}$$

معادله ی فوق یک دستگاه N-معادله N-مجهول همگن است. در حالت کلی این دستگاه معادلات جوابهای بدیهی دارد یعنی برای همه ی jها $c_j^n = 0$. تنها زمانی جواب غیر بدیهی است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد یعنی:

$$\det\left(\hat{A} - a_n \mathbb{1}\right) = 0 \ . \tag{۶۱.۴}$$

معادله بالا یک معادله ی درجه N بر حسب a_n است که با حل آن N ویژه مقدار a_n که $n = 1, 2, \cdots, N$ بدست می آید. اگر ریشه های معادله مضاعف باشند، بدین معناست که برخی حالتهای متفاوت دارای ویژه مقادیر یکسان هستند و بنابراین تبهگنی داریم.

در حالتی که تبهگنی نداریم، به ازاء هر a_n بدست آمده، معادله ی (۶۰.۴) را حل میکنیم و c_j^n ها را بدست می آوریم و بدین ترتیب نمایش ماتریسی $|a_n\rangle$ بدست می آید. باید توجه داشت که با حل این معادله نهایتا یکی از ضرایب c_j^n مجهول باقی میماند که باید از شرط بهنجارش محاسبه شود. اما اگر تبهگنی داشته باشیم، در زیر مجموعه ی تبهگن، حتی پس از اعمال شرط بهنجارش هم یکی یا بیشتر (بسته به مرتبه ی تبهگنی) پارامتر مجهول باقی میماند که باید از شرط تعامد بین ویژه کت های تبهگن بدست آیند. با عین حال در نهایت یک پارامتر مجهول باقی خواهد ماند که میتواند در دامنه اش بینهایت مقدار بگیرد. بدین ترتیب برای ویژه مقدار تبهگن بینهایت مجموعه ویژه کتهای دو به دو متعامد خواهیم یافت، بر خلاف حالت غیر تبهگن که این مجموعه ویژه کتها یکتا هستند. در ادامه دو مثال، یکی برای حالت ناتبهگن و دیگری برای حالت تبهگن حل میکنیم.

مثال ۳.۴. ماتریس هامیلتونی سامانه ای برابر است با

$$\hat{H} \doteq \mathcal{E}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ . \tag{۶۲.۴}$$

ویژه مقادیر و ویژه حالتهای آنرا بدست آورید.

حل: ابتدا برای یافتن ویژه مقادیر $\hat{H}$ معادله ی $\det\left(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}\right) = 0$ را حل میکنیم یعنی

$$\begin{vmatrix} -\lambda & i\mathcal{E} & 0 \\ -i\mathcal{E} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathcal{E} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (2\mathcal{E} - \lambda)(\lambda^2 - \mathcal{E}^2) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 2\mathcal{E} = E_1 \ , \\ \lambda = \mathcal{E} = E_2 \ , \\ \lambda = -\mathcal{E} = E_3 \ . \end{cases} \tag{۶۳.۴}$$

واضح است که تمام ریشه های معادله متفاوتند و تبهگنی نداریم. حال برای هرکدام از ویژه مقادیر بدست آمده، معادله ی ویژه مقداری را حل کرده و ویژه کت متناظر با آن را بدست می آوریم. ابتدا برای $E_1 = 2\mathcal{E}$ فرض میکنیم نمایش ماتریسی ویژه کت متناظر با آن $|E_1\rangle$ برابر

$$|E_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{۶۴.۴}$$

باشد. حال داریم:

$$\mathcal{E}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 2\mathcal{E}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ . \tag{۶۵.۴}$$

رابطه بالا در واقع سه معادله و سه مجهول جبری است:

$$\begin{cases} ic_2 = 2c_1 \\ -ic_1 = 2c_2 \\ 2c_3 = 2c_3 \end{cases} \tag{۶۶.۴}$$

از دو معادله ی اول به این نتیجه میرسیم که $c_1 = c_2 = 0$. معادله ی سوم هم یک رابطه ی بدیهی همیشه درست است و اطلاعات جدیدی به ما نمیدهد. بنابراین $|E_1\rangle$ برابر است با

$$|E_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} \ . \tag{۶۷.۴}$$

همانطور که در قبل هم اشاره شد بعد از حل معادله ی ویژه مقداری همواره یک ضریب مجهول (در اینجا c_3) باقی میماند که باید از شرط بهنجارش $\langle E_1|E_1\rangle = 1$ بدست آید. با اعمال این شرط خواهیم داشت

$$|E_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{۶۸.۴}$$

از نمایش ماتریسی ساده ی $|E_1\rangle$ مشخص است که این ویژه کت یکی از پایه های فضا است. این را از روی نمایش ماتریسی $\hat{H}$ هم میتوان فهمید چراکه سطر و ستون مربوط به آرایه ی $(3,3)$ ماتریس $\hat{H}$ صفر است و بعلاوه مقدار این درایه برابر $2\mathcal{E}$ است که همان ویژه مقدار متناظر با ویژه کت $|E_1\rangle$ است. بعلاوه از روی ماتریس $\hat{H}$ مشخص است که ویژه کتهای متناظر با دو ویژه مقدار دیگر پایه های فضا نیستند. چراکه سطر و ستون مربوط به آرایه های قطری باقیمانده (یعنی $(1,1)$ و $(2,2)$) صفر نیستند. بنابراین انتظار داریم ماتریس های $|E_2\rangle$ و $|E_3\rangle$ بیش از یک آرایه ی غیر صفر داشته باشند. در ادامه ویژه کت متناظر با ویژه مقدار $E_2 = \mathcal{E}$ را بدست می آوریم. مجددا با فرض

$$|E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ , \tag{۶۹.۴}$$

داریم

$$\mathcal{E} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ , \tag{۷۰.۴}$$

که به سه معادله ی زیر منتج میشود:

$$\begin{cases} ic_2 = c_1 \\ -ic_1 = c_2 \\ 2c_3 = c_3 \end{cases} \tag{۷۱.۴}$$

از معادله ی سوم داریم $c_3 = 0$. معادله ی اول و دوم در واقع ضریبی از یکدیگر هستند و بدست می آوریم $c_2 = -ic_1$. بنابراین کت $|E_2\rangle$ برابر است با

$$|E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ -ic_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۲.۴}$$

مجددا ضریب c_1 باقی ماند که از شرط بهنجارش خواهیم داشت

$$\langle E_2|E_2\rangle = 1 \implies 2c_1^2 = 1 \implies c_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ . \tag{۷۳.۴}$$

از آنجا که ضرب یک عدد در کت محتوای فیزیک آن را تغییر نمیدهد، انتخاب علامت + یا - برای c_1 تفاوتی ندارد. ما در اینجا علامت + را انتخاب میکنیم و نهایتا خواهیم داشت:

$$|E_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۴.۴}$$

به طریق مشابه برای ویژه مقدار $E_3 = -\mathcal{E}$ خواهیم داشت

$$|E_3\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۵.۴}$$

میتوان براحتی وارسی کرد که ویژه کتهای $|E_1\rangle$، $|E_2\rangle$ و $|E_3\rangle$ دو به دو برهم عمودند. بعلاوه تشکیل یک مجموعه ی کامل را میدهند یعنی

$$\sum_{i=1}^{3} |E_i\rangle\langle E_i| = \mathbb{1} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۶.۴}$$

پس این ویژه کتها میتوانند پایه هایی برای فضای هیلبرت مسئله باشند و در این صورت نمایش ماتریسی $\hat{H}$ قطری بوده و عناصر روی قطر اصلی همان ویژه مقادیر خواهند بود. □

در مثال بعدی حالتی را بررسی میکنیم که ویژه مقدارها تبهگن هستند.

مثال ۴.۴. ماتریس هامیلتونی سامانه ای برابر است با

$$\hat{H} \doteq \mathcal{E} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۷.۴}$$

ویژه مقادیر و ویژه حالتهای آنرا بدست آورید.

حل: ابتدا به کمک رابطه ی $\det\left(\hat{H} - \lambda\mathbb{1}\right) = 0$ ویژه مقادیر را بدست می آوریم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \lambda = -\mathcal{E} = E_1 \ , \\ \lambda = \mathcal{E} = E_2 \ , \\ \lambda = \mathcal{E} = E_3 \ . \end{cases} \tag{۷۸.۴}$$

در ویژه مقدار E_1 تبهگنی نداریم و ویژه کت متناظر با آن برابر است با

$$|E_1\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{۷۹.۴}$$

اما برای ویژه مقادیر $E_2 = E_3 = \mathcal{E}$ تبهگنی از مرتبه ی ۲ وجود دارد. فرض کنید ماتریس ویژه کت متناظر با این ویژه مقدار تبهگن $|E_j\rangle$ که $j = 2, 3$ را بصورت زیر بنویسیم:

$$|E_j\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \ . \tag{۸۰.۴}$$

با جایگذاری این ویژه کت در معادله ی ویژه مقداری به معادلات زیر میرسیم:

$$\begin{cases} ic_2 = c_1 \\ -ic_1 = c_2 \\ c_3 = c_3 \end{cases} \ . \tag{۸۱.۴}$$

معادلات اول و دوم ضرایبی از یکدیگر هستند و معادله ی سوم یک رابطه ی بدیهی است. بنابراین ماتریس $|E_j\rangle$ برابر خواهد بود با

$$|E_j\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ -ic_1 \\ c_3 \end{pmatrix} . \tag{۸۲.۴}$$

میتوان وارسی کرد که به ازاء تمام مقادیر c_1 و c_3، کت $|E_j\rangle$ بر کت $|E_1\rangle$ عمود است. در اینجا بر خلاف حالت ناتبهگن که یک پارامتر مجهول باقی میماند، با دو پارامتر مجهول روبرو هستیم. ابتدا شرط بهنجارش را بکار میبریم و داریم:

$$\langle E_j|E_j\rangle = 1 \implies c_3 = \sqrt{1-2c_1^2} \implies |E_j\rangle \doteq \begin{pmatrix} c_1 \\ -ic_1 \\ \sqrt{1-2c_1^2} \end{pmatrix} . \tag{۸۳.۴}$$

تنها رابطه ی باقیمانده تعامد بین دو ویژه کت تبهگن است. با فرض $c_1 = x$ برای $|E_2\rangle$ و $c_1 = y$ برای $|E_3\rangle$ داریم

$$|E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ \sqrt{1-2x^2} \end{pmatrix} , \quad \text{و} \quad |E_3\rangle \doteq \begin{pmatrix} y \\ -iy \\ \sqrt{1-2y^2} \end{pmatrix} . \tag{۸۴.۴}$$

شرط تعامد $\langle E_2|E_3\rangle = 0$ به معادله ی زیر منتج میشود:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \implies y = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} . \tag{۸۵.۴}$$

بنابراین ویژه کتهای تبهگن $|E_2\rangle$ و $|E_3\rangle$ از قرار زیر خواهند بود:

$$|E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ \sqrt{1-2x^2} \end{pmatrix} , \quad |E_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-2x^2} \\ -i\sqrt{1-2x^2} \\ 2x \end{pmatrix} . \tag{۸۶.۴}$$

میبینیم که جواب ویژه کتهای تبهگن یکتا نیستند و برای هر مقدار مجاز x که $-1/\sqrt{2} \le x \le 1/\sqrt{2}$ یک انتخاب برای $|E_2\rangle$ و $|E_3\rangle$ داریم. بنابراین عملا بینهایت مجموعه ی $\{|E_2\rangle\, , |E_3\rangle\}$ خواهیم داشت که هرکدام به اندازه ی دیگری معتبر است. با انتخاب $x = 0$ یکی از این جوابها از قرار زیر بدست می آید:

$$|E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad |E_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{۸۷.۴}$$

اگر انرژی سامانه را اندازه بگیریم و مقدار آن $-\mathcal{E}$ شود، سامانه در حالت $|E_1\rangle$ است. اما اگر انرژی برابر $\mathcal{E}$ شد، اگرچه میدانیم سامانه در حالت $|E_1\rangle$ نیست اما نمیتوانیم بگوییم در کدامیک از حالتهای $|E_2\rangle$ یا $|E_3\rangle$ قرار دارد. در اینجا نیاز به مشاهده پذیر دیگری است که مجموعه ویژه کتهای $\{|E_1\rangle\, , |E_2\rangle\, , |E_3\rangle\}$ ویژه کتهای آن هم باشند و ویژه مقدارش برای ویژه کتهای $|E_2\rangle$ و $|E_3\rangle$ متفاوت باشد تا بدین ترتیب با اندازه گیری مشاهده پذیر دوم تبهگنی از بین برود و حالت سامانه بصورت یکتا مشخص شود. □

در مثال بعد تبدیل پایه را از ویژه کتهای یک مشاهده پذیر به ویژه کتهای مشاهده پذیر دیگر بررسی میکنیم.

مثال ۵.۴. دو مشاهده پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در نظر بگیرید که نمایش ماتریسی آنها در زیر داده شده است:

$$\hat{A} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{B} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{۸۸.۴}$$

(الف) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای بهنجار $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را بدست آورید.

حل: ویژه مقادیر $\hat{A}$ عبارتند از $a_1 = \sqrt{2}$، $a_2 = 0$ و $a_3 = -\sqrt{2}$. ویژه بردارهای متناظر با این ویژه مقادیر از قرار زیر هستند:

$$|a_1\rangle \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \ , \quad |a_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \ , \quad |a_3\rangle \doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \ . \tag{۸۹.۴}$$

ماتریس $\hat{B}$ قطری است. پس بنا بر قضیه (۶.۴) ویژه مقادیر آن برابر $b_1 = 1$، $b_2 = 0$ و $b_3 = -1$ است و ویژه بردارهای متناظر از قرار زیر هستند:

$$|b_1\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \ , \quad |b_2\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \ , \quad |b_3\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \ . \tag{۹۰.۴}$$

میتوان نشان داد هرکدام از مجموعه های $\{|a_i\rangle\}$ یا $\{|b_i\rangle\}$ تشکیل مجموعه ی کامل داده و میتوانند پایه های فضا باشند. البته از نمایش ماتریسی $\hat{B}$ واضح است که ویژه کتهای آن، $\{|b_i\rangle\}$، پایه های فضا هستند.

(ب) ماتریس تبدیل $\hat{U}$ را به قسمی بیابید که پایه های $\{|a_i\rangle\}$ را به پایه های $\{|b_i\rangle\}$ ببرد.

حل: عناصر ماتریس تبدیل $\hat{U}$ از $\{|a_i\rangle\}$ به $\{|b_i\rangle\}$ برابر است با $U_{ij} = \langle b_i|a_j\rangle$. بنابراین ماتریس $\hat{U}$ از قرا زیر خواهد بود:

$$\hat{U} \doteq \begin{pmatrix}\langle b_1|a_1\rangle & \langle b_1|a_2\rangle & \langle b_1|a_3\rangle\\ \langle b_2|a_1\rangle & \langle b_2|a_2\rangle & \langle b_2|a_3\rangle\\ \langle b_3|a_1\rangle & \langle b_3|a_2\rangle & \langle b_3|a_3\rangle\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix} \ . \tag{۹۱.۴}$$

(پ) نمایش ماتریسی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در پایه های $\{|a_i\rangle\}$ بدست آورید.

حل: نمایش ماتریسی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ در پایه های $\{|b_i\rangle\}$ است که ویژه کت $\hat{B}$ هستند. به همین دلیل نمایش $\hat{B}$ در آن قطری است. حال باید تبدیلی بیابیم که از پایه های $\{|b_i\rangle\}$ به پایه های $\{|a_i\rangle\}$ برویم. واضح است که وقتی $\hat{U}$ پایه های $\{|a_i\rangle\}$ را به $\{|b_i\rangle\}$ میبرد، $\hat{U}^\dagger$ پایه های $\{|b_i\rangle\}$ را به $\{|a_i\rangle\}$ تبدیل میکند. بنابراین نمایش $\hat{A}$ در پایه های جدید $\{|a_i\rangle\}$ از قرار زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{A}' \ &= \ \hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} \doteq \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\\ &= \ \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{۹۲.۴}$$

میبینیم که نمایش $\hat{A}$ در پایه های جدید قطری است و روی قطر اصلی ویژه مقادیر قرار دارند که البته قابل پیش بینی بود، چراکه پایه های جدید ویژه کتهای $\hat{A}$ هستند. طبیعتا نمایش $\hat{B}$ در پایه های جدید قطری نخواهد بود که میتوانید آنرا وارسی کنید. همچنین وارسی کنید که در پایه های جدید ویژه کتهای $\hat{A}$ نمایش ساده ی $(1, 0, 0)^T$ و ... خواهند داشت. □

در دو مثال بعد به اندازه گیری همزمان مشاهده پذیرها میپردازیم که در یکی دو مشاهده پذیر باهم جابجا شده و بنابراین همزمان قابل اندازه گیری هستند و در دیگری با هم جابجا نمیشوند و نتیجه ی اندازه گیری به ترتیب آنها بستگی دارد.

مثال ۶.۴ سامانه ای را در نظر بگیرید که ابتدا در حالت $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}\Big(\sqrt{2}\,|\phi_1\rangle + \sqrt{3}\,|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle\Big)$ قرار دارد که $\{|\phi_n\rangle\}$ ها ویژه حالتهای انرژی سامانه هستند به قسمی که $|H\rangle\,|\phi_n\rangle = n^2\mathcal{E}_0\,|\phi_n\rangle$.

(الف) اگر انرژی سامانه اندازه گیری شود، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: ترازهای انرژی سامانه همان ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه، $E_n = n^2\mathcal{E}_0$، هستند که به ازاء $n = 12, 3, 4$ بدست می آیند و برابرند با

$$E_1 = \mathcal{E}_0\ ,\ \ E_2 = 4\mathcal{E}_0\ ,\ \ E_3 = 9\mathcal{E}_0\ ,\ \ E_4 = 16\mathcal{E}_0\ . \tag{۹۳.۴}$$

دامنه ی احتمال اندازه گیری هرکدام از این ویژه مقادیر برابر است با $\langle\phi_n|\psi_0\rangle$ و بنابراین احتمالهای مربوطه که از قرار زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\Pr(\psi_0 \to \phi_n) = \Pr(E_n) = |\langle\phi_n|\psi_0\rangle|^2 \implies \\ \Pr(E_1) = \tfrac{2}{7}\ ,\ \ \Pr(E_2) = \tfrac{3}{7}\ ,\ \ \Pr(E_3) = \tfrac{1}{7}\ ,\ \ \Pr(E_4) = \tfrac{1}{7}\ .\end{aligned} \tag{۹۴.۴}$$

(ب) عملگر $\hat{A}$ را در نظر بگیرید که تاثیر آن روی $|\phi_n\rangle$ها به صورت $\hat{A}\,|\phi_n\rangle = (n+1)a_0\,|\phi_n\rangle$ تعریف میشود. اگر $\hat{A}$ بر روی سامانه ی $|\psi_0\rangle$ اندازه گیری شود، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: به طریق مشابه قسمت (الف) مقادیر اندازه گیری شده ی $\hat{A}$ ویژه مقادیر آن است که برابرند با

$$a_1 = 2a_0\ ,\ \ a_2 = 3a_0\ ,\ \ a_3 = 4a_0\ ,\ \ a_4 = 5a_0\ . \tag{۹۵.۴}$$

از آنجا که کتهای $|\phi_n\rangle$ ویژه کتهای $\hat{A}$ هم هستند بنابراین دامنه ی احتمال بدست آمدن ویژه مقادیر بالا از اندازه گیری $\hat{A}$ بر روی سامانه $|\psi_0\rangle$ برابر است با $\langle\phi_n|\psi_0\rangle$ و احتمالهای متناظر دقیقا همان احتمالات $\Pr(E_n)$ بوده و از قرار زیر هستند:

$$\Pr(a_1) = \frac{2}{7}\ ,\ \ \Pr(a_2) = \frac{3}{7}\ ,\ \ \Pr(a_3) = \frac{1}{7}\ ,\ \ \Pr(a_4) = \frac{1}{7}\ . \tag{۹۶.۴}$$

(پ) فرض کنید انرژی را اندازه گرفته ایم و مقدار $4\mathcal{E}_0$ بدست آمده است. اگر بلافاصله $\hat{A}$ را اندازه بگیریم، چه مقداری بدست خواهد آمد؟

حل: اگر مقدار انرژی $4\mathcal{E}_0$ شود پس $n = 2$ و سامانه در حالت $|\phi_2\rangle$ است. چون $|\phi_n\rangle$ها ویژه کتهای $\hat{A}$ هم هستند، پس اگر روی حالت کنونی سامانه یعنی $|\phi_2\rangle$ مقدار $\hat{A}$ را اندازه بگیریم با احتمال ۱ مقدار $3a_0$ را بدست می آوریم و حالت سامانه پس از آن تغییر نخواهد کرد.

(ت) اگر ابتدا $\hat{A}$ را اندازه بگیریم و مقدار $4a_0$ بدست آید، و بلافاصله $\hat{H}$ را اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: با استدلال مشابه قسمت (پ) خواهیم داشت $n = 3$ است و مقدار انرژی با احتمال ۱ برابر $9\mathcal{E}_0$ بدست می آید. $\square$

در مثال بعدی حالتی را بررسی میکنیم که دو مشاهده گر باهم جابجا نمیشوند و نتیجه اندازه گیری به ترتیب آنها وابسته است.

مثال ۷.۴. سامانه ای را در نظر بگیرید که حالت آن $|\psi\rangle = \frac{1}{6}\Big(-|\phi_1\rangle + 2\,|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle \Big)$ است و نمایش ماتریسی هامیلتونی آن و مشاهده پذیر $\hat{A}$ به شکل زیر است:

$$\hat{H} \doteq \mathcal{E}_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\quad \hat{A} \doteq a_0 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{۹۷.۴}$$

(الف) اگر انرژی سامانه را اندازه بگیریم چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: مقادیر انرژی سامانه همان ویژه مقادیر هامیلتونی هستند و برابرند با $E_1 = 0$، $E_2 = -\mathcal{E}_0$ و $E_3 = 2\mathcal{E}_0$. دامنه ی احتمال اینکه هرکدام از این مقادیر از اندازه گیری منتج شوند برابر $\langle E_n|\psi\rangle$ است که $|E_n\rangle$ ویژه کتهای هامیلتونی هستند. بنابراین ابتدا باید این ویژه کتها را بدست آوریم که از قرار زیر خواهند بود:

$$|E_1\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad |E_2\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \ , \quad |E_3\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \ . \tag{۹۸.۴}$$

همچنین نمایش ماتریسی $|\psi\rangle$ برابر است با

$$|\psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \ . \tag{۹۹.۴}$$

پس احتمال اینکه از اندازه گیری انرژی سامانه هرکدام از ویژه مقادیر آن منتج شود برابر است با

$$\begin{aligned}
\Pr(\psi \to E_1) &= |\langle E_1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{12} \ , \\
\Pr(\psi \to E_2) &= |\langle E_2|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{6} \ , \\
\Pr(\psi \to E_3) &= |\langle E_3|\psi\rangle|^2 = \frac{3}{4} \ .
\end{aligned} \tag{۱۰۰.۴}$$

(ب) اگر روی سامانه $\hat{A}$ را اندازه بگیریم، چه مقادیر یو با چه احتمالاتی بدست می آیند؟

حل: مشابه قسمت (الف)، مقادیر خروجی ویژه مقادیر $\hat{A}$هستند که برابرند با

$$a_1 = -\sqrt{17}a_0 \ , \quad a_2 = 0 \ , \quad a_3 = \sqrt{17}a_0 \ . \tag{۱۰۱.۴}$$

همچنین سامانه پس از اندازه گیری $\hat{A}$ در یکی از ویژه حالتهای آن قرار میگیرد:

$$|a_1\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}4\\-\sqrt{17}\\1\end{pmatrix} \ , \quad |a_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} \ , \quad |a_3\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}4\\\sqrt{17}\\1\end{pmatrix} \ , \tag{۱۰۲.۴}$$

که احتمال برون داد هریک از آنها از قرار زیر است:

$$\begin{aligned}
\Pr(\psi \to a_1) &= |\langle a_1|\psi\rangle|^2 = \frac{77}{204} + \frac{1}{\sqrt{17}} \ , \\
\Pr(\psi \to a_2) &= |\langle a_2|\psi\rangle|^2 = \frac{25}{102} \ , \\
\Pr(\psi \to a_3) &= |\langle a_3|\psi\rangle|^2 = \frac{77}{204} - \frac{1}{\sqrt{17}} \ .
\end{aligned} \tag{۱۰۳.۴}$$

(پ) فرض کنید از اندازه گیری انرژی مقدار صفر بدست آید. اگر بلافاصله $\hat{A}$ را اندازه بگیریم چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: وقتی از اندازه گیری انرژی مقدار صفر بدست آمده است بدین معناست که سامانه در حالت $|E_1\rangle$ است. حال اگر $\hat{A}$ را اندازه بگیریم نتیجه اندازه بگیریم نتیجه ی اندازه گیری یکی از ویژه مقادیر $\hat{A}$ خواهد بود و حالت سامانه در ویژه کت متناظر

با ویژه مقدار خروجی قرار خواهد داشت. بنابراین احتمال یافتن هرکدام از ویژه مقادیر $\hat{A}$ که ناشی از اندازه گیری $\hat{A}$ بر روی $|E_1\rangle$ است برابر است با

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1 \to a_1) &= |\langle a_1|E_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{68}}\begin{pmatrix}4 & -\sqrt{17} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{(4-\sqrt{17})^2}{68}\,,\\
\Pr(E_1 \to a_2) &= |\langle a_2|E_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{34}\,,\\
\Pr(E_1 \to a_3) &= |\langle a_3|E_1\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{68}}\begin{pmatrix}4 & \sqrt{17} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{(4+\sqrt{17})^2}{68}\,.
\end{aligned} \qquad (۱۰۴.۴)$$

(ت) اگر از اندازه گیری $\hat{A}$ روی سامانه مقدار صفر بدست آید، و بلافاصله انرژی را اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

حل: در این مورد، حالت سامانه پس از اندازه گیری $\hat{A}$ برابر $|a_2\rangle$ است و بنابراین احتمال یافتن مقادیر مختلف انرژی حاصل از اندازه گیری انرژی روی این حالت برابر است با:

$$\begin{aligned}
\Pr(a_2 \to E_1) &= |\langle E_1|a_2\rangle|^2 = \frac{1}{34}\,,\\
\Pr(a_2 \to E_2) &= |\langle E_2|a_2\rangle|^2 = \frac{16}{17}\,,\\
\Pr(a_2 \to E_3) &= |\langle E_3|a_2\rangle|^2 = \frac{1}{34}\,.
\end{aligned} \qquad (۱۰۵.۴)$$

(ث) اگر بر روی سامانه ابتدا انرژی و سپس $\hat{A}$ را اندازه بگیریم، با چه احتمالی مقدار انرژی صفر و مقدار $\hat{A}$ صفر بدست می آید؟ حالت نهایی سامانه چیست؟

حل: پس از اندازه گیری صفر برای انرژی سامانه در حالت $|E_1\rangle$ و پس از اندازه گیری صفر برای $\hat{A}$ سامانه در حالت $|a_2\rangle$ قرار میگیرد. بنابراین حالت نهایی سامانه $|a_2\rangle$ است و احتمال آن برابر است با

$$\Pr(\psi \to E_1 \to a_2) = \Pr(\psi \to E_1)\Pr(E_1 \to a_2) = \frac{1}{6}\,.\,\frac{1}{34} = \frac{1}{204}\,. \qquad (۱۰۶.۴)$$

(ج) حالت (ث) را برای زمانی حل کنید که ترتیب اندازه گیری انرژی و $\hat{A}$ عوض شود. آیا جواب با حالت (ث) متفاوت است؟ چرا؟

حل: در این حالت، سامانه ابتدا از $|\psi\rangle$ به حالت $|a_2\rangle$ و سپس به $|E_1\rangle$ خواهد رفت. پس حالت نهایی سامانه $|E_1\rangle$ خواهد بود با احتمال

$$\Pr(\psi \to a_2 \to E_1) = \Pr(\psi \to a_2)\Pr(a_2 \to E_1) = \frac{25}{102}\,.\,\frac{1}{34} = \frac{25}{3468}\,. \qquad (۱۰۷.۴)$$

واضح است که حالت نهایی سامانه و احتمال آنها در قسمتهای (ث) و (ج) با هم متفاوت است چراکه مشاهده پذیرهای $\hat{H}$ و $\hat{A}$ باهم جابجا نمیشوند. □