مکانیک کوانتومی

مفاهیم، مبانی و کاربردها

علیرضا علمائی

استادیار فیزیک دانشگاه جهرم

فهرست مطالب

۱ مروری بر فیزیک کلاسیک ۵

۱.۱ مکانیک کلاسیک ۵

۱.۱.۱ صورت‌بندی نیوتون ۶

۲.۱.۱ صورت‌بندی لاگرانژ ۷

۳.۱.۱ صورت‌بندی هامیلتون ۱۳

۲.۱ الکترومغناطیس ۱۶

۱.۲.۱ معادلات ماکسول ۱۶

۲.۲.۱ امواج تخت ۱۹

۳.۲.۱ قطبش ۲۰

۴.۲.۱ امواج در مرز دو محیط ۲۵

۵.۲.۱ هامیلتونی ذره ی باردار در میدان الکترومغناطیسی ۲۶

۳.۱ ترمودینامیک و مکانیک آماری ۲۷

۱.۳.۱ قانون صفرم ترمودینامیک ۲۸

۲.۳.۱ قانون اول ترمودینامیک ۲۹

۳.۳.۱ قانون دوم ترمودینامیک ۳۰

۴.۳.۱ ریزحالت ها و درشت حالت ها ۳۱

۵.۳.۱ هنگرد کانونی ۳۲

فصل ۱

مروری بر فیزیک کلاسیک

در این فصل به مروری بر مفاهیم فیزیک از گالیله تا قبل از ۱۹۰۰ میلادی می‌پردازیم که به آن فیزیک کلاسیک گوییم. به عبارتی به ساختار فیزیک تا قبل از ظهور نسبیت و مکانیک کوانتومی فیزیک کلاسیک گفته می‌شود. بصورت کلی فیزیک کلاسیک شامل سه شاخه‌ی کلی می‌شود که البته در ارتباط تنگاتنگ با یکدیگر هستند. مکانیک کلاسیک که با رصدهای تیکو براهه و کپلر و گالیله شروع شد و با پژوهش‌ها و دستاوردهای فکری نیوتن به اوج خود رسید. اهمیت مکانیک کلاسیک از آن روست که اصول و روش‌مندی ریاضی را به عنوان زبان بیان پدیده‌های فیزیکی معرفی می‌کند که تا به امروز، اگرچه نمی‌دانیم چرا، اما بی کم و کاست برقرار است. مکانیک کلاسیک علیت را به عنوان یکی از زیربناهای مفهومی وارد قوانین فیزیک کرد. به عبارتی اگر علت و شرایط اولیه‌ی یک سامانه را بدانیم، رفتار و حالت آن‌را در تمامی زمان‌های بعدی می‌توانیم پیش‌بینی کنیم. پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی یا به عبارتی الکترومغناطیس پیش از میلاد مسیح مورد توجه مردم بوده و نهایتا با مدل‌سازی مکانیکی که ماکسول از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی انجام داد به چهار معادله‌ی اساسی منجر شد که تمامی پدیده‌های الکترومغناطیسی را به دقت توضیح داده و پیش‌بینی می‌کند. گرما، فشار، دما و خواص مشابه که نمایان‌گر ویژگی‌های بزرگ مقیاس یک سامانه فیزیکی به عنوان یک کل (یعنی مجموعه‌ی ذرات تشکیل دهنده‌ی آن) هستند در ترمودینامیک بررسی می‌شود. هم‌چنین به‌دست آوردن این خواص به کمک مطالعه‌ی رفتار تک‌تک ذرات تشکیل دهنده‌ی سامانه از طریق انواع روش‌های آماری به مکانیک آماری معروف است که اتفاقا تولد فیزیک کوانتومی از همین مطالعات اتفاق افتاد.

مرور بر این سه شاخه‌ی فیزیک از آن رو ضروریست که اولا فضای ذهنی حاکم بر جامعه‌ی فیزیکی آن زمان درک شود. چراکه انقلابی بودن مفاهیم کوانتومی زمانی کاملا قابل فهم خواهد بود که بدانیم معرفی این مفاهیم و مبانی تا چه حد عدول از برخی بنیان‌های اساسی فیزیک کلاسیک بوده است. ثانیا روند برساختن مکانیک کوانتومی به عنوان یک انتخاب ناگزیر برای توضیح نتایج آزمایش‌هایی که با فیزیک کلاسیک قابل توضیح نیستند زمانی به به‌ترین و منطقی‌ترین روش قابل تشریح است که دقیقا بدانیم فیزیک کلاسیک در چه بزنگاه‌هایی در توضیح نتایج برخی آزمایش‌ها واماند و چه تغییرات بنیادینی برای توضیح این نتایج لازم بود.

۱.۱ مکانیک کلاسیک

مکانیک کلاسیک بر چند اصل ضمنی بنا شده است. اصل اول این که که تمامی ویژگی‌های یک سامانه‌ی فیزیکی به صورت کامل و در هر زمان معین میشود. به این اصل **تعین گرایی مطلق**[۱] گوییم. اصل دوم این است که تمامی کمیت‌ها را می‌توان با دقت دلخواه اندازه گرفت. یعنی خطای اندازه گیری را می‌توان به صفر کاهش داد. به عبارتی تنها منبع خطای اندازه گیری محدودیتهای فناورانه حاکم بر دستگاه اندازه گیریست و مادامی که بتوانیم این محدودیتهای عملی را کاهش دهیم دقت اندازه گیری هم بدون هیچ محدودیتی افزایش میابد. سومین اصل حاکم پیوستگی تمامی کمیت‌های دینامیکی است. منظور از کمیت دینامیکی کمیتی است که بر طبق معادلات حرکت[۲] با زمان تحول میابد (مانند انرژی، تکانه خطی و زاویه ای و ...) و بنابراین کمیتهایی نظیر بار الکتریکی غیر دینامیکی بوده و جزء این دسته نیستند. پیوسته بودن کمیتهای دینامیکی، علاوه بر اینکه مبنای تجربی دارد، به لحاظ ریاضیاتی از آن رو لازم است که مشتق پذیر بوده و مشتقات آنها بتواند در معادلات حرکت ظاهر شود.

نتیجه ی این اصول آن است که با شناخت سامانه (یعنی معادلات حرکت حاکم بر آن) و شرایط حاکم بر آن (یعنی دانستن

[۱] Perfect Determinism

[۲] معادلات حرکت تحول سامانه را بر حسب زمان به دست می‌دهند و بنابراین معادله دیفرانسیلهایی هستند شامل مشتقاتی از زمان.

مقادیر کمیتهای دینامیکی در یک زمان معین)، آینده ی آن قابل پیشگوییست و حالت آن در زمانهای بعدی **یکتا** است. همچنین گذشته ی سامانه هم یکتاست. به این شرایط **تعینیت**[۳] گوییم که زیربنای مفهومی و فلسفی فیزیک کلاسیک است. در آینده خواهیم دید تفاوت بنیادی بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی از همینجا ناشی می‌شود.

فرض بسیار مهم ما در مکانیک کلاسیک این است که با دانستن مکان و سرعت ذرات یک سامانه در یک زمان معین، حالت سامانه (یعنی مکان و سرعت ذراتش) در زمانهای بعدی کاملا و به صورت یکتا معین خواهد شد. بنابراین معادلات حرکت سامانه، مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه دو خواهد بود. چراکه برای تعیین جواب آن فقط به دو شرط اولیه (مکان و سرعت) نیازمندیم. اینکه چرا فقط به دو شرط اولیه (و نه کمتر و نه بیشتر) نیازمندیم به هیچ وجه بدیهی نیست و نتیجه ی مستقیم مشاهدات ماست. یعنی هیچ اصل فیزیکی پیشینی وجود ندارد که ما را مطمین کند که برای توصیف یک سامانه ی کلاسیکی حتما به دو و فقط دو شرط اولیه نیازمندیم. بنابراین در اینجا باید توجه داشته باشیم که ممکن است مشاهدات تجربی وجود داشته باشد که برای توجیه آنها به کمتر یا بیشتر از دو شرط اولیه نیازمند باشیم. به این موضوع بعدا و در هنگام توصیف اصل عدم قطعیت برخواهیم گشت.

اصل ضمنی و بسیار مهم دیگری که بر مکانیک کلاسیک حاکم است **اصل جداپذیری**[۴] است که میگوید تمامی کمیتهای دینامیکی دو سامانه ی بدون برهمکنش $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ بصورت جداگانه و مستقل از هم قابل اندازه گیری هستند. اگرچه این اصل بدیهی به نظر می‌رسد و شواهد آزمایشگاهی هم قویا آن را تایید می‌کنند، اما پس از ظهور مکانیک کوانتومی و بخصوص از سالهای ۱۹۳۰ میلادی به بعد موضوع مورد بحثی بوده است. به این موضوع هم در فصول آینده خواهیم پرداخت.

۱.۱.۱ صورت‌بندی نیوتون

قوانین نیوتن ساختار مفهومی و محاسباتی لازم را برای توصیف و توضیح هر سامانه ی کلاسیکی فراهم می آورد. قانون اول که معرفی کننده ی چارچوب مرجعی مرجح به نام **چارچوب مرجع لخت** است در واقع زیربنای مفهومی لازم برای معرفی قانون دوم است که تمامی محاسبات را انجام می‌دهد. به عبارتی قانون دوم نیوتن در چارچوب مرجعی که قانون اول معرفی میکند (چارچوب لخت) صادق است. دقت و بررسی در قانون اول و تلاش برای تعمیم آن است که مبنای نسبیت عام اینشتین قرار می‌گیرد. به همین ترتیب قانون سوم هم فقط در حیطه ی مکانیک نانسبیتی (یعنی در سرعتهای بسیار کمتر از سرعت نور) کاملا صادق است و در محدوده ی نسبیتی لازم به تنقیح و تعمیم است. در این درس، یعنی مکانیک کوانتومی نانسبیتی، فرض ما بر این است که همه ی این قوانین مطلقا برقرارند.

اما قانون دوم، یعنی ابزار محاسباتی، که موضوع بحث ماست باید عامل تحول سامانه یعنی نیروی وارد بر ذره را به مشتق زمانی مرتبه دوم مکان ذره مرتبط کند. چراکه همانطور که در بالا گفته شد برای توصیف تحول سامانه به دو شرط اولیه روی مکان و سرعت نیازمندیم و بنابراین معادله حرکت باید شامل مشتق دوم زمانی از مکان سامانه باشد. فلذا قانون دوم نیوتن به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ , \tag{۱.۱}$$

که ضریب تناسب m جرم لختی است. باید دانست که اگرچه قانون دوم نیوتن برای توصیف یک سامانه مکانیکی لازم است، اما تعداد معادلاتی که بدست میدهد معمولا کافی نیست. دسته معادلات دیگری هم در کنار این معادلات لازم است که مستقل از نیروهای وارده است و به هندسه و شکل مسیله وابسته است. این معادلات را معادلات قید گوییم که در نهایت رابطه ی بین شتابهای اجزای مختلف یک سامانه را بدست می‌دهد. مجموع معادلات حاصل از قانون دوم نیوتن و معادلات قید، تعداد معادله ی کافی برای پیش بینی و توصیف حرکت سامانه را به دست می‌دهند.

صورت کلی تر قانون دوم نیوتن با تعریف کمیت تکانه خطی

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\ , \tag{۲.۱}$$

به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\ , \tag{۳.۱}$$

[۳] Determinism
[۴] Principle of Separability

که برای سامانه‌های با جرم متغیر هم قابل استفاده است. اگر نیروی $\mathbf{F}$ پایسته باشد، می‌توان آن را بر حسب گرادیان کمیتی به نام انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ نوشت:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \,, \tag{۴.۱}$$

که نهایتا خواهیم داشت:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \,. \tag{۵.۱}$$

تا اینجا واضح است که صورت بندی نیوتونی مکانیک کلاسیک بر اساس مفهوم نیروست. این مفهوم اگرچه برای توصیف سامانه های کلاسیکی بسیار مفید است، ولی در حیطه ی مکانیکی نسبیتی و بخصوص مکانیک کوانتومی چندان خوش تعریف نیست و لذا مکانیک نیوتونی ابزار مناسبی برای توضیح پدیده های غیرکلاسیکی نیست. از این رو مکانیک های نسبیتی و کوانتومی و ترکیب آنها یعنی کوانتوم نسبیتی عموما بر اساس صورت بندیهای معادلی نظیر لاگرانژ و هامیلتون بیان می‌شوند.

۲.۱.۱ صورت‌بندی لاگرانژ

یکی از اساسی ترین مفاهیم در مکانیک کلاسیک مفهوم ذره است. ذره جسمی است که بتوانیم از ابعاد آن در مقایسه با ابعاد مسیله مورد نظر صرف نظر کنیم. بلحاظ ریاضیاتی ذره را با نقطه نشان می‌دهیم. یک سامانه ی تک ذره ای را در فضای سه بعدی می‌توان با سه مختصه نشان داد که در دستگاههای مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی به ترتیب با سه تایی های مرتب (x, y, z)، (ρ, ϕ, z) و (r, θ, ϕ) نشان داده می‌شوند. این مختصه ها را مستقل از اینکه طول یا زاویه هستند با سه تایی مرتب (q_1, q_2, q_3) نشان داده و مختصه ی تعمیم یافته می‌نامیم. بنابراین یک سامانه ی N ذره ای در فضای سه بعدی با حداکثر $3N$ مختصه ی تعمیم یافته توصیف می‌شود. همانگونه که در صورت بندی نیوتونی متذکر شدیم معمولا سامانه ها دارای یک یا چند قید هستند که به ساختار و هندسه ی سامانه بستگی دارد و مستقل از برهمکنش بین اجزای مختلف سامانه است. مثلا جسمی که روی سطح شب داری لیز میخورد، مستقل از وجود نیروی اصطکاک مقید است روی این این سطح حرکت کند و بنابراین شتاب آن در راستای عمود بر سطح شیب دار صفر است. این نتیجه سوای از معادلات قانون دوم نیوتن و منتج از هندسه ی مسیله است. بنابراین به تعداد قیود مسیله، از تعداد مختصه های مورد نیاز برای توصیف سامانه، که به آنها **درجات آزادی** سامانه میگوییم، کم میشود. به عباراتی اگر r تعداد قیود و n درجات آزادی سامانه باشد داریم:

$$n = 3N - r \,. \tag{۶.۱}$$

با این توضیحات، برای توصیف یک سامانه با n درجه ی آزادی به n مختصه ی تعمیم یافته ی $(q_1, q_2, ..., q_n)$ نیازمندیم. در حالت کلی مختصه های تعمیم یافته به زمان وابسته اند: $q_i(t)$، که معمولا جهت اختصار از نشان دادن وابستگی زمانی آنها صرف نظر میکنیم. به همین ترتیب مشتق زمانی مختصات تعمیم یافته را سرعت تعمیم یافته میگوییم: $(\dot{q}_1, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$، که هر نقطه بالای کمیتهای دینامیکی بیانگر یک بار مشتق گیری نسبت به زمان است. تکانه و نیروی تعمیم یافته نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

اگر تمام qها و $\dot{q}$ها در یک لحظه همزمان معلوم باشند، از تجربه میدانیم که حالت سامانه کاملا معلوم میشود و رفتار سامانه در لجظات بعدی کاملا قابل پیش بینی است. یعنی اگر q و $\dot{q}$ را در یک لحظه بدانیم، $\ddot{q}$ در آن لحظه کاملا معلوم است. مجددا یاداوری میکنیم که این یک نتیجه ی تجربی است و هیچ اصل فیزیکی وجود ندارد که بیان کند برای توصیف رفتار یک سامانه در هر لحظه تنها به مختصه و سرعت آن در آن لحظه نیازمندیم. رابطه ی بین شتابها، سرعتها و مختصه ها را **معادله ی حرکت** گوییم. معادله ی حرکت یک معادله ی دیفرانسل مرتبه دو از مختصه های $q_i(t)$ است. به تعداد درجات آزادی سامانه معادله ی حرکت خواهیم داشت که از حل آنها مسیر حرکت سامانه بدست می آید.

در صورت بندی لاگرانژ، کمیتی به نام **لاگرانژی**[۵] تعریف میشود که تابعی از مختصه ها و سرعتهای تعمیم یافته و زمان است:

$$L(q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) = L(q, \dot{q}; t) \,, \tag{۷.۱}$$

که برای اختصار قرار داده ایم: $(q_1, q_2, ..., q_n) = q$ و $(\dot{q}_1, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) = \dot{q}$. اینکه شکل تابع لاگرانژی به چه صورت است را بعدا توضیح خواهیم داد. انتگرال زمانی لاگرانژی را **کنش**[۶] $\mathcal{A}$ گوییم که به صورت زیر تعریف میشود:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}; t) \,. \tag{۸.۱}$$

[۵] Lagrangian
[۶] Action

در مکانیک لاگرانژ تحول هر سامانه به کمک **اصل کمترین کنش** [۷] لاگرانژ توصیف میشود که به قرار زیر است:

اصل کمترین کنش لاگرانژ: اگر سامانه ای در لحظه ی t_1 در $q^{(1)}$ و در لحظه ی t_2 در $q^{(2)}$ باشد، حرکت سامانه از $q^{(1)}$ به $q^{(2)}$ به قسمی است که کنش $\mathcal{A}$ کمینه (در حالت کلی اکسترمم) باشد یعنی:

$$\delta\mathcal{A} = 0 \,. \tag{۹.۱}$$

با بکار گیری اصل فوق بر روی انتگرال کنش (۸.۱) خواهیم داشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q,\dot{q};t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \Big) = 0 \,. \tag{۱۰.۱}$$

با توجه به اینکه $\delta\dot{q}_i = d\delta q_i/dt$ و استفاده از انتگرال جزء به جزء و همچنین $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$ به معادلات **اویلر - لاگرانژ** میرسیم:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \,, \quad i = 1,2,\ldots,n \,, \tag{۱۱.۱}$$

که هم ارز معادلات قانون دوم نیوتن (۱.۱) است. اگر لاگرانژی سامانه ای معلوم باشد معادلات (۱۱.۱) رابطه ی بین مختصه ها، سرعتها و شتابها را بدست میدهد. معادلات (۱۱.۱) n معادله دیفرانسیل مرتبه دو هستند که برای حل یکتای آنها به $2n$ شرط اولیه (مثلا n شرط روی مختصه و n شرط روی سرعت) نیاز است.

تمرین ۱.۱. ثابت کنید اگر دو لاگرانژی L_1 و L_2 تا حد مشتق کامل زمانی یک تابع دلخواه از مکان و زمان با هم اختلاف داشته باشند، معادلات اویلر-لاگرانژشان یکسان است و بنابراین با هم معادلند.

برای بدست آوردن لاگرانژی یک سامانه به بنیادی ترین تقارنهای حاکم بر مکانیک کلاسیک میپردازیم. این تقارنها خود را در تبدیلات چارچوبهای مرجع لخت نشان میدهند. قوانین مکانیک کلاسیک از دید دو ناظر لخت با هم تفاوتی ندارند و به عبارتی **ناوردا** هستند. تبدیلاتی که دو ناظر لخت $\mathcal{K}$ و $\mathcal{K}'$ با سرعت نسبی $\mathbf{V}$ را به هم مربوط میکند **تبدیلات گالیله** نام دارند:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t \,, \\ t' &= t \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

تقارنهای پیش فرض تبدیلات گالیله به قرار زیر هستند:

۱. **همگنی فضا:** مکانهای مختلف در فضا با هم یکسانند.

۲. **همسانگردی فضا:** جهتهای مختلف در فضا با هم یکسانند.

۳. **همگنی زمان:** هر لحظه یا بازه ی زمانی با هر لحظه یا بازه ی زمانی دیگر یکسان است.

اهمیت این تقارنها از آنجاست که با در نظر گرفتن آنها، تمامی کمیتهای دینامیکی مانند انرژی، تکانه ی خطی و تکانه ی زاویه ای به عنوان نتیجه ی ناگزیر این تقارنها بدست می آیند. همچنین کمیتی مانند جرم لختی که در صورت بندی نیوتنی بصورت یک پارامتر تناسب در قانون دوم ظاهر میشد در اینجا بصورت پارامتر تناسبی منتج از اعمال این تقارنها بدست خواهد آمد. در مکانیک نیوتونی تقارنها به عنوان یک ویژگی سامانه ها، معادلات حاکم بر آنها و نه یک اصل بنیادی در نظر گرفته میشود. اما هرچقدر سطوح بنیادیتری از فیزیک را در نظر میگیریم نقش تقارن برجسته تر میشود، به قسمی که اکنون اساسی ترین اصول حاکم بر قوانین بنیادی طبیعت تقارنهای حاکم بر آنهاست و این قوانین هستند که از تقارنها بدست می آیند، بر خلاف مکانیک نیوتونی که تقارنها یک ویژگی نچندان اساسی از قوانین حرکت بودند.

لاگرانژی ذره ی آزاد

برای تعیین شکل لاگرانژی ابتدا به ساده ترین حالت، یعنی ذره ی آزاد میپردازیم. برای یک ذره ی آزاد تقارنهای بالا این نتیجه را میدهند که لاگرانژی نباید تابعی از $\mathbf{r}$ یا t یا جهت سرعت باشد. تنها کمیتی که تقارنهای بالا را حفظ میکند بزرگی سرعت است. به عبارتی:

$$L = L(v^2) \,. \tag{۱۳.۱}$$

[۷] Principle of Least Action

این بدان معناست که $\partial L/\partial \mathbf{r} = 0$، که از معادله ی اویلر-لاگرانژ (۱۱.۱) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 \,. \tag{۱۴.۱}$$

بنابراین $\partial L/\partial \mathbf{v} = const.$، که میدهد:

$$\mathbf{v} = const. \tag{۱۵.۱}$$

پس ما نتیجه گرفتیم که در یک چاچوب لخت، حرکت هر ذره ی آزاد سرعتی ثابت (چه در مقدار و چه در جهت) دارد که همان قانون اول نیوتن یا قانون لختی است.

از رابطه ی (۱۳.۱) مشخص است که لاگرانژی ذره ی آزاد فقط به v^2 بستگی دارد. برای مشخص کردن نوع وابستگی لاگرانژی به v^2 فرض میکنیم دو چارچوب مرجع $\mathcal{K}$ و $\mathcal{K}'$ با سرعت نسبی بینهایت کوچک V نسبت به هم در حال حرکتند یعنی $V \ll v, v'$. از تبدیلات گالیله ی (۱۲.۱) برای دو چارچوب مرجع $\mathcal{K}$ و $\mathcal{K}'$ داریم:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \,. \tag{۱۶.۱}$$

چون معادلات حرکت نباید از $\mathcal{K}$ به $\mathcal{K}'$ تغییر کند، پس $L(v^2)$ و $L(v'^2)$ باید با هم برابر باشند یا طبق تمرین (۱.۱) حداکثر تا حد یک مشتق زمانی کامل با هم اختلاف داشته باشند. از معادله ی (۱۳.۱) و با توجه به معادله ی (۱۶.۱) داریم:

$$L(v'^2) = L(v^2 - 2\mathbf{V}\cdot\mathbf{v} + V^2) \,. \tag{۱۷.۱}$$

با بسط رابطه ی بالا تا توان اول $\mathbf{V}$ داریم:

$$L(v'^2) = L(v^2) - \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{V}\cdot\mathbf{v} + \mathcal{O}(V^2) \,. \tag{۱۸.۱}$$

برای اینکه جمله ی دوم مشتق کامل زمانی باشد باید متناسب با توان اول $\mathbf{v}$ بوده و بنابراین لازم است $\partial L/\partial v^2$ مستقل از $\mathbf{v}$ باشد. بنابراین لاگرانژی L متناسب با v^2 خواهد بود و خواهیم داشت:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \,. \tag{۱۹.۱}$$

میبینیم که پارامتر جرم m اولین بار اینجا ظاهر میشود که مستقیما نتیجه تقارنهای فضا و زمان است. از آنجا که ضرب لاگرانژی در هر عدد ثابت معادلات حرکت را تغییر نمیدهد، ضریب $1/2$ در معادلات حرکت خللی وارد نمیکند. همچنین آنچه به لحاظ فیزیکی قابل اندازه گیری و دارای معناست نسبت جرمها به یکدیگر است که در این حالت هم این ضریب مشکلی ایجاد نخواهد کرد. چراکه مثلا جرم ۲ کیلوگرمی در حقیقت نسبت جرم مفروض به جرم مبناست که قرارداد کرده ایم یک کیلوگرم باشد.

تمرین ۲.۱. لاگرانژی ذره ی آزاد را در دستگاه های مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی بنویسید.

برای سامانه ای از مجموعه ای از ذرات آزاد که با هم برهمکنش ندارند، لاگرانژی کل برابر مجموع لاگرانژی ذرات سامانه است، یعنی:

$$L = \sum_i L_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 \,. \tag{۲۰.۱}$$

لاگرانژی سامانه ای از ذرات

اگر بین ذرات سامانه برهمکنش وجود داشته باشد، این برهمکنشها را به صورت جمله ای که تابعی از مختصات ذرات سامانه است به لاگرانژی اضافه میکنیم. این تابع را با $-V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ نشان میدهیم. بنابراین لاگرانژی سامانه ای از ذرات با برهمکنش برابر است با:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q_1, q_2, \ldots, q_n) \,. \tag{۲۱.۱}$$

عبارتهای $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$ و $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ را به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سامانه گوییم. بنابراین در کلی ترین حالت لاگرانژی هر سامانه برابر خواهد بود با:

$$L = T - V \,. \tag{۲۲.۱}$$

مثال ۱.۱. برای سامانه ای تک ذره ای با یک درجه آزادی که تحت تاثیر انرژی پتانسل V است معادله ی حرکت را بدست آوردید.

حل: لاگرانژی این سامانه برابر است با

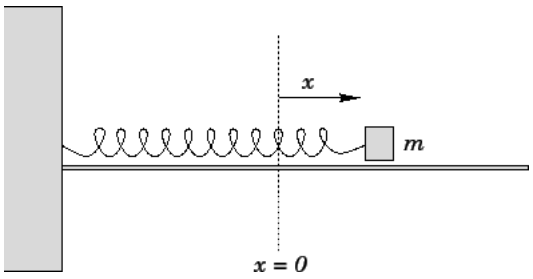
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\ , \tag{۲۳.۱}$$

که با جایگذاری در معادله اویلر-لاگرانژ (۱۱.۱) خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}\ , \tag{۲۴.۱}$$

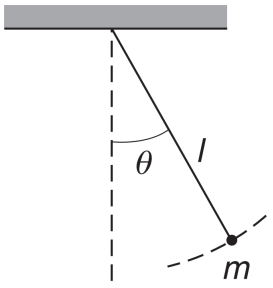
که با توجه به معادله ی (۴.۱) واضح است که نتیجه ی بدست آمده همان قانون دوم نیوتن است. به عبارتی قانون دوم نیوتون به عنوان نتیجه ی معادله ی اویلر-لاگرانژ بدست می آید. □

تمرین ۳.۱. با توجه به شکل (۱.۱) لاگرانژی ذره ای به جرم m که به فنری به سختی k متصل است را نوشته و معادله حرکتش را بدست آورید.



شکل ۱.۱: ذره ای به جرم m که با یک درجه ی آزادی x به فنری به سختی k متصل است.

تمرین ۴.۱. برای ذره ای به جرم m که به آونگی به طول l متصل است با یک درجه ی آزادی θ، لاگرانژی و معادله ی حرکت را بنویسید.



شکل ۲.۱: ذره ای به جرم m که با یک درجه ی آزادی θ به آونگی به طول l متصل است.

ثابتهای حرکت

در طول حرکت کمیتهای q_i و $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ تغییر میکنند که حالت سامانه را با گذشت زمان نشان میدهند. کمیتهایی به صورت تابعی از q_iها و $\dot{q}_i$ها را که با گذشت زمان تغییر نمیکنند، ثابت حرکت گویند. ثابتهای حرکتی که از تقارنهای همگنی زمان یا همگنی و همسانگردی فضا بدست می آیند بسیار اهمیت دارند و به آنها **کمیتهای پایسته** گوییم. ویژگی مهم کمیتهای پایسته این است که خاصیت جمع پذیری[۸] دارند. در ادامه سه کمیت پایسته ی مهم را از سه تقارن بالا بدست می آوریم:

[۸] additivity

۱. انرژی: اولین کمیت پایسته ای که ناشی از همگنی زمان است را انرژی مینامیم. برای یک سامانه ی بسته فرض همگنی زمان ایجاب میکند که لاگرانژی هیچ وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد یعنی:

$$L(q,\dot{q};t) = L(q,\dot{q}) \; . \tag{۲۵.۱}$$

بنابراین با توجه به معادله ی فوق مشتق زمانی کامل لاگرانژی برابر است با:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \Big) \; . \tag{۲۶.۱}$$

از کاربرد معادله ی اویلر-لاگرانژ (۱۱.۱) در جمله ی اول معادله ی بالا داریم:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \Big] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \; , \tag{۲۷.۱}$$

که نهایتا به نتیجه ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \Big) = 0 \; . \tag{۲۸.۱}$$

کمیت داخل پرانتز که ناشی از فرض همگنی زمان است با گذشت زمان ثابت است، و بنابراین پایسته است را انرژی سامانه، E، گوییم:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \; . \tag{۲۹.۱}$$

چون انرژی تابعی خطی از لاگرانژی است و لاگرانژی جمع پذیر است ، بنابراین انرژی هم کمیتی جمع پذیر است. نکته ی بسیار مهم و جالب این است که ما تعریف انرژی و پایستگی آن را صرفا از شرط تقارن همگنی زمان و ناوردایی لاگرانژی سامانه تحت تحول زمانی بدست آوردیم.

برای هر سامانه ی بسته اولا $L = T - V$ و ثانیا T تابعی درجه دو از سرعت است که نتیجه میدهد:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \; . \tag{۳۰.۱}$$

با جایگذاری (۳۰.۱) در معادله ی (۲۹.۱) خواهیم داشت:

$$E = T + V \; . \tag{۳۱.۱}$$

بنابراین انرژی هر سامانه را میتوان بصورت مجموع دو جمله نوشت: انرژی جنبشی که به سرعت وابسته است و انرژی پتانسیل که به مکان بستگی دارد.

۲. تکانه ی خطی: کمیت پایسته ی بعدی ناشی از همگنی فضا است و آن را تکانه ی خطی مینامیم. از خاصیت همگنی فضا نتیجه میگیریم که ویژگی های مکانیکی سامانه نباید با انتقال کل سامانه در فضا تغییر کند یا به عبارتی $\delta L = 0$. برای سادگی یک سامانه ی تک ذره ای با یک درجه ی آزادی را در نظر میگیریم. فرض کنیم کل سامانه به اندازه ی بینهایت کوچک a در فضا منتقل شود یعنی: $q \to q + a$. بنابراین تغییرات لاگرانژی ناشی از آن برابر است با:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q = a\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \; . \tag{۳۲.۱}$$

برای برقراری شرط بالا به ازای هر انتقال دلخواه a باید $\partial L/\partial q = 0$، که از معادله اویلر-لاگرانژ (۱۱.۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \; . \tag{۳۳.۱}$$

از معادله ی فوق واضح است که کمیتی که بخاطر همگنی فضا ثابت و بنابراین پایسته است و آن را تکانه ی خطی مینامیم برابر با $p = \partial L/\partial \dot{q}$ خواهد بود که در حالت کلی برای یک سامانه ی با n درجه آزادی مولفه ی iم تکانه ی خطی برابر است با:

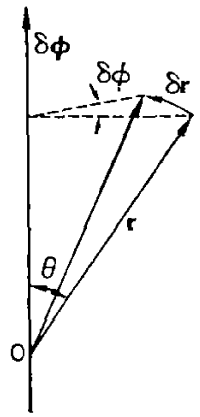
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, . \tag{۳۴.۱}$$

معادله ی (۳۲.۱) دارای معنای واضحی است:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = -F_i = 0 \, , \tag{۳۵.۱}$$

که بدین معناست که اگر مولفه ی iم نیرو صفر باشد تکانه ی خطی p_i منتاظر با آن پایسته خواهد بود. خاصیت جمع پذیری تکانه ی خطی از تعریف آن واضح است.

۳. تکانه ی زاویه ای: کمیت پایسته ی منتج از همسانگردی فضا تکانه ی زاویه ای نام دارد. برای سادگی فعلا یک سامانه تک ذره ای در سه بعد را بررسی میکنیم. نتیجه براحتی به سامانه ی چند ذره ای قابل تعمیم است. ابتدا یک دوران بینهایت کوچک $\delta\phi$ را در نظر میگیریم و شرایطی را بدست می آوریم که تحت آن لاگرانژی ناوردا بماند. مطابق شکل (۳.۱) تغییرات



شکل ۳.۱: دوران به اندازه ی $\delta\phi$ حول محور دوران که با بردار $\delta\boldsymbol{\phi}$ معلوم شده است.

بردار مکان $\mathbf{r}$ بخاطر دوران $\delta\phi$ برابر است با

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} \, . \tag{۳۶.۱}$$

همچنین بردار سرعت هم بخاطر دوران به شکل زیر تغیر میکند:

$$\delta\mathbf{v} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v} \, . \tag{۳۷.۱}$$

بنابراین تغییرات لاگرانژی که تابعی از مکان و سرعت است با دوران سامانه به شکل زیر خواهد بود:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{v} \, . \tag{۳۸.۱}$$

با جایگذاری $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ و $\dot{\mathbf{p}} = \partial L/\partial \mathbf{r}$ و همچنین (۳۶.۱) و (۳۷.۱) در رابطه ی بالا به نتیجه ی زیر میرسیم:

$$\delta L = \dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}) \, , \tag{۳۹.۱}$$

که با استفاده از جایگشت چرخشی ضرب بردارها داریم:

$$\delta L = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}) = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \, . \tag{۴۰.۱}$$

همسانگردی فضا به معنای ناوردایی لاگرانژی تحت دوران سامانه است که یعنی $\delta L = 0$، که بنا بر رابطه ی (۴۰.۱) به نتیجه ی زیر برای هر دوران دلخواه $\delta\boldsymbol{\phi}$ میرسیم:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \,. \tag{۴۱.۱}$$

پس کمیتی که بخاطر همسانگردی فضا تحت دوران تغییر نمیکند $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ خواهد بود که به آن تکانه ی زاویه ای گوییم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \,. \tag{۴۲.۱}$$

تکانه ی زاویه ای هم مانند انرژی و تکانه ی خطی کمیتی جمع پذیر است. به جر انرژی، تکانه ی خطی و تکانه ی زاویه ای هیچ کمیت پایسته ی جمع پذیر دیگری وجود ندارد.

۳.۱.۱ صورت‌بندی هامیلتون

صورتبندی لاگرانژ مکانیک بر این پیش فرض بنا شده است که حالت سامانه با مشخص کردن مختصه ها و سرعتهای تعمیم یافته، $(\{q\}, \{\dot{q}\})$، معین میشود. مجموعه ی مختصه ها و سرعتها تنها مجموعه ی ممکن برای توصیف سامانه نیست و میتوان با توجه به رابطه ی (۳۴.۱) از مجموعه ی تکانه های تعمیم یافته بجای سرعت تعمیم یافته استفاده کرده و حالت سامانه با مجموعه ی $(\{q\}, \{p\})$ توصیف میشود.

در اینجا برای توصیف سامانه از یک مجموعه متغیر مستقل به مجموعه متغیر مستقل دیگری میرویم. رفتن از یک مجموعه متغیر مستقل به مجموعه متغیر مستقل دیگر که هردو یک سامانه را توصیف میکنند توسط یک تبدیل انجام میشود که در زبان ریاضیات به آن **تبدیل لژاندر**[۹] میگویند. به عنوان مثال، یک خط را میتوان با دانستن مختصات تک تک نقاط آن یعنی مجموعه ی (x, y)ها توصیف کرد. اما همین خط با دانستن شیب m و عرض از مبداء r آن در تمامی نقاطش معین میشود. به عبارتی مجموعه متغیرهای مستقل دیگری، (m, r)، وجود دارند که همان خط را بصورت یکتا تعیین میکنند. تبدیل لژاندر است که ما را از مجموعه ی (x, y) به مجموعه ی (m, r) میبرد.

با مجموعه متغیرهای $(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$ سامانه به وسیله ی $L(q, \dot{q})$ توصیف میشود. حال برای تبدیل لژاندر از مجموعه ی $(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$ به مجموعه ی $(\{q_i\}, \{p_i\})$، دیفرانسیل لاگرانژی را بخاطر تغییرات دیفرانسیلی متغیرهای مستقل آن بدست می آوریم:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \Big) \,. \tag{۴۳.۱}$$

با استفاده از معادلات (۱۱.۱) و (۳۴.۱) در معادله ی بالا خواهیم داشت:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \Big(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \Big) \,. \tag{۴۴.۱}$$

جمله ی دوم معادله ی بالا را به شکل زیر بازنویسی میکنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i d\dot{q}_i = d\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \Big) - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i dp_i \,, \tag{۴۵.۱}$$

که با جایگذاری آن در معادله ی (۴۴.۱) خواهیم داشت:

$$d\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i \Big) \,. \tag{۴۶.۱}$$

[۹] Legendre Transformation

با توجه به معادلات (۲۹.۱) و (۳۴.۱) واضح است که عبارت داخل پرانتز سمت راست معادله ی بالا انرژی سامانه است که بر حسب مختصه ها و تکانه های تعمیم یافته بیان شده است و به آن **هامیلتونی**[۱۰] سامانه گوییم:

$$H(q,p;t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L\ , \tag{۴۷.۱}$$

و بنابراین

$$dH=\sum_{i=1}^{n}\Big(-\dot{p}_i dq_i+\dot{q}_i dp_i\Big)\ . \tag{۴۸.۱}$$

از طرفی چون هامیلتونی تابعی از مختصه ها و تکانه هاست، برای dH داریم:

$$dH=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big)\ , \tag{۴۹.۱}$$

که با مقایسه با (۴۸.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_i}&=-p_i\ ,\\ \frac{\partial H}{\partial p_i}&=\dot{q}_i\ .\end{aligned} \tag{۵۰.۱}$$

این معادلات را **معادلات هامیلتون** گویند و دوگان معادلات اویلر-لاگرانژ است. در اینجا با $2n$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول سر و کار داریم درحالیکه معادلات اویلر-لاگرانژ n معادله دیفرانسیل درجه دوم هستند. در هر صورت برای هر دو دسته معادله به $2n$ شرط اولیه نیازمندیم. به معادلات بالا **معادلات کانونیک**[۱۱] هم گفته میشود.

مشتق کامل زمانی هامیلتونی برابر است با:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\ , \tag{۵۱.۱}$$

که با جایگذاری $\dot{q}_i$ و $\dot{p}_i$ از معادلات اویلر-لاگرانژ دو جمله ی آخر یکدیگر را میکشند و خواهیم داشت:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}\ . \tag{۵۲.۱}$$

بخصوص اگر هامیلتونی وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد $\partial H/\partial t=0$ و خواهیم داشت:

$$\frac{dH}{dt}=0\ , \tag{۵۳.۱}$$

که همان قانون پایستگی انرژی منتج از همگنی زمان است.

کروشه های پواسون[۱۲]

فرض کنید کمیت $f(q,p;t)$ تابعی از مختصات، تکانه و زمان باشد. مشتق کامل زمانی آن برابر است با:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\Big)\ . \tag{۵۴.۱}$$

[۱۰] Hamiltonian
[۱۱] Canonical Equations
[۱۲] Poisson's Brackets

از معادلات هامیلتون (۵۰.۱) بجای $\dot{q}_i$ و $\dot{p}_i$ جایگذاری میکنیم و داریم:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) \,. \tag{۵۵.۱}$$

تعریف میکنیم:

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) \,, \tag{۵۶.۱}$$

که به آن **کروشه ی پواسون** f و H گویند و بنابراین معادله ی (۵۵.۱) برابر خواهد بود با:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \,. \tag{۵۷.۱}$$

از معادله ی بالا میبینیم که شرط اینکه کمیت f ثابت حرکت باشد $(df/dt = 0)$ این است که

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \,. \tag{۵۸.۱}$$

اگر ثابت حرکت وابستگی صریح به زمان نداشته باشد خواهیم داشت:

$$\{f, H\} = 0 \,, \tag{۵۹.۱}$$

که بدین معناست که **کروشه ی پواسون ثابت حرکت و هامیلتونی صفر است.**

حال اگر در معادله ی (۵۶.۱) بجای هامیلتونی کمیت دلخواه دیگری مانند $g(q,p)$ را قرار دهیم کروشه ی پواسون برای دو کمیت دلخواه f و g به صورت زیر بدست می آید:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \Big) \,. \tag{۶۰.۱}$$

کروشه های پواسون دارای خواص زیر هستند:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \,, \tag{۶۱.۱}$$

$$\{f, c\} = 0 \quad (c \text{ یک عدد است}) \,, \tag{۶۲.۱}$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \,, \tag{۶۳.۱}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\} \,.$$

اگر در کروشه پواسون (۶۰.۱) یکی از توابع f یا g مختصه یا تکانه باشند خواهیم داشت:

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \,, \tag{۶۴.۱}$$

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \,.$$

بعلاوه اگر در معادلات بالا بجای f مختصه یا تکانه تعمیم یافته را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \,, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = -\delta_{ij} \,. \tag{۶۵.۱}$$

این معادلات بعدا به شکلی در صورت بندی مکانیک کوانتومی ظاهر میشوند و پیامدهای عمیقی خواهند داشت. برای هر سه کمیت دلخواه f و g و h میتوان اتحاد زیر را که به **اتحاد ژاکوبی** معروف است اثبات کرد:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \,. \tag{۶۶.۱}$$

فضای فاز[۱۳]

در صورتبندی هامیلتونی، حالت هر سامانه در هر لحظه با دانستن مجموعه ی مختصه ها و تکانه های آن معلوم میشود. به عبارتی مجموعه ی $2n$تایی مرتب $(q,p)=(\{q\},\{p\})=(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n)$ مشخص کننده ی حالت سامانه در هر لحظه است. مجموعه ی این نقاط در یک فضای $2n$ بعدی قرار دارند که محورهای مختصاتش nتا مختصه و nتا تکانه ی تعمیم یافته است. به این فضای مجرد ریاضی **فضای فاز** گوییم. این $2n$تایی های مرتب نقاطی در فضای فاز هستند و به عبارتی حالت سامانه در هر لحظه با یک نقطه در فضای فاز معین میشود. هنگامی که سامانه با گذشت زمان تحول میابد از یک حالت به حالتی دیگر میرود که از دید فضای فاز بدین معناست که از یک نقطه ی فضای فاز به نقطه ی دیگری میرود. البته از آنجا که مختصه ها و تکانه ها نمیتوانند تغییرات ناپیوسته و ناگهانی داشته باشند، تحول نقطه به نقطه در فضای فاز کاملا پیوسته و روی یک منحنی هموار است. این منحنی را مسیر فاز گوییم.

حاصلضرب

$$d\Gamma = dq_1dq_2\ldots dq_ndp_1dp_2\ldots dp_n = \prod_{i=1}^{n} dq_i \prod_{i=1}^{n} dp_i \ , \tag{۶۷.۱}$$

را میتوان به عنوان جزء حجم در فضای فاز در نظر گرفت. بنابراین حجم فضای فاز برابر است با

$$\Gamma = \int d\Gamma \ . \tag{۶۸.۱}$$

۲.۱ الکترومغناطیس

در زندگی روزمره، به جز نیروی وزن، همه ی نیروهایی که با آن ها سر و کار داریم سرشت الکترومغناطیسی دارند. از مثال واضحی چون برق و الکتریسیته تا نیروی فنر و کشش نخ، تا خاصیت مغناطیسی زمین و آهنرباها، تا تمامی واکنش های شیمیایی و نتیجتا همه ی عملکردهای زیستی ما و تمامی موجودات زنده، همگی بر اساس برهمکنشهای الکتریکی یا مغناطیسی بنا شده اند. بعلاوه پدیده ای چون نور، از امواج رادیویی و مادون قرمز، تا طیف مرئی، تا فرکانسهای فرابنفش و پرتوهای ایکس و گاما همگی توسط امواج الکترومغناطیسی توصیف میشوند. به همین دلیل الکترومغناطیس شاخه ی بسیار مهمی از فیزیک کلاسیک را تشکیل میدهد.

بعلاوه، بسیاری از آزمایشهایی که در آنها اثرات کوانتومی و نقص توصیف کلاسیکی نمایان میشود آزمایشهای نورشناختی[۱۴] هستند که مبنای آنها امواج الکترومغناطیسی است. آزمایشهایی که اساس آنها انتشار امواج الکترومغناطیسی و بررسی و تحلیل قطبش این امواج است. همچنین از خاصیت موجی امواج الکترومغناطیس در تحلیل دوگانگی موج-ذره در مکانیک کوانتوم در فصلهای آینده استفاده خواهیم کرد. از این رو در این بخش مروری هرچند مختصر بر نظریه الکترومغناطیس خواهیم داشت تا مفاهیمی که در فصلهای آینده به وفور به کار میروند را مرور کنیم.

۱.۲.۱ معادلات ماکسول

معادلاتی که پدیده های الکترومغناطیسی را توصیف میکنند معادلات ماکسول نام دارند:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho \ , \tag{۶۹.۱آ}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \ , \tag{۶۹.۱ب}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{۶۹.۱ج}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \ . \tag{۶۹.۱د}$$

[۱۳] Phase Space
[۱۴] optical

این معادلات چهار معادله دیفرانسیل همبسته ی مرتبه ی اول هستند. در حالت کلی این میدانها تابعی از مکان و زمان هستند. در خلاء رابطه ی زیر بین این میدانها برقرار است:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \,, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \,, \end{aligned} \tag{۷۰.۱}$$

که ϵ_0 و μ_0 به ترتیب ضرایب گذردهی و نفوذپذیری خلاء بوده و برابرند با:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \ (\mathrm{F/m}) \,, \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \ (\mathrm{H/m}) \,. \end{aligned} \tag{۷۱.۱}$$

در محیطی که هیچ منبع بار و جریانی وجود نداشته باشد $(\mathbf{J} = 0,\ \rho = 0)$ دو معادله ی اول ماکسول به شکل زیر خواهند بود:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \,, \tag{۷۲.۱آ}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \,, \tag{۷۲.۱ب}$$

که در آن

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299,792,458 \ (\mathrm{m/s}) \,, \tag{۷۳.۱}$$

سرعت نور در خلاء است.

از قانون بقای بار به معادله ی زیر میرسیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \,, \tag{۷۴.۱}$$

که به معادله ی پیوستگی [۱۵] مشهور است. همچنین به یک ذره ی باردار با بار q که با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان الکترومغناطیسی حرکت میکند نیروی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \,, \tag{۷۵.۱}$$

وارد میشود که به نیروی لورنتس[۱۶] معروف است.

میتوان از معادلات (۶۹.۱ج) و (۶۹.۱د) پتانسیلهای نرده ای Φ و برداری $\mathbf{A}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \,, \tag{۷۶.۱آ}$$

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \,. \tag{۷۶.۱ب}$$

حل معادلات ماکسول به کمک این پتانسیلها معمولا راحت تر است. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ابتدا به ساکن به کمک منابع بار و جریان تعریف میشوند. به عنوان مثال میدان الکتریکی بار نقطه ای q در فاصله ی $\mathbf{r}$ از آن برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \,. \tag{۷۷.۱}$$

اما معادلات ماکسول در غیاب منبع هم جواب غیر صفر دارند. به این جوابها امواج الکترومغناطیس گوییم که در واقع میدانهای الکتریکی و مغناطیسی هستند که در فضا منتشر میشوند. برای حل معادلات ماکسول، ابتدا میدانها را از روابط (۷۶.۱) در معادلات (۶۹.۱) جایگذاری کرده که برای محیط بدون منبع خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \big) = 0 \,, \tag{۷۸.۱آ}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} - \boldsymbol{\nabla} \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big) = 0 \,. \tag{۷۸.۱ب}$$

[۱۵] continuity equation
[۱۶] Lorentz force

در اینجا بجای چهار معادله دیفرانسیل درجه اول، دو معادله دیفرانسیل درجه دو بدست آوردیم. البته این معادلات هم مانند معادلات ماکسول همبسته هستند. با توجه به آزادی عملی که در تعریف پتانسیل ها داریم میتوان همبستگی این معادلات را از بین برد و به دو معادله دیفرانسیل جدا شده و مستقل از هم رسید.

چون رابطه ی بین میدانها و پتانسیلها بصورت مشتقات مکانی و زمانی (۷۶.۱) است، میتوان تا حد گرادیان و مشتق زمانی یک تابع نرده ای دلخواه Λ، پتانسیلها را به قسمی تغییر داد که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تغییر نکنند:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda \,, \tag{آ۷۹.۱}$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \,. \tag{ب۷۹.۱}$$

به این آزادی در تغییر پتانسیلها، آزادی پیمانه ای[۱۷] گویند. به کمک آزادی پیمانه ای فوق میتوانیم پتانسیلهای نرده ای و برداری را به قسمی انتخاب کنیم که رابطه زیر را که شرط لورنز[۱۸] نامیده میشود ارضا کنند:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \,. \tag{۸۰.۱}$$

این شرط معادلات (۷۸.۱) را بصورت دو معادله غیر همبستگیی در می آورد:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \,, \tag{آ۸۱.۱}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} = 0 \,. \tag{ب۸۱.۱}$$

مجموعه معادلات (۸۰.۱) و (۸۱.۱) از همه ی جهات دوگان معادلات ماکسول در خلاء و در غیاب منبع هستند.

چگالی انرژی الکترومغناطیسی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \,, \tag{۸۲.۱}$$

که در خلاء برابر است با:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2) \,. \tag{۸۳.۱}$$

در غیاب منبع، بقای انرژی به رابطه زیر میرسد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} = 0 \,. \tag{۸۴.۱}$$

بردار $\mathbf{S}$ بیانگر شارش انرژی است و بردار پوینتینگ [۱۹] نامیده میشود و برابر است با

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \,. \tag{۸۵.۱}$$

بعد بردار پوینتینگ از جنس توان بر مساحت است و میتوان از آن به شار توان میدان الکترومغناطیسی تعبیر کرد. جهت بردار پوینتینگ جهت انتقال انرژی الکترومغناطیسی است.

---

[۱۷] gauge freedom
[۱۸] Lorenz condition
[۱۹] Poynting vector

۲.۲.۱ امواج تخت

یکی از ویژگیهای اساسی معادلات ماکسول، پیش بینی وجود امواج پیش رونده ی الکترومغناطیسی است. ساده ترین و بنیادی ترین نوع امواج الکترومغناطیسی، امواج تخت عرضی است. در اینجا تمرکز خود را بر امواج تخت تکفام[۲۰] با وابستگی زمانی تناوبی $e^{-i\omega t}$ معطوف میکنیم چراکه هر موج دلخواهی را به کمک سری فوریه میتوان به صورت مجموعی از امواج تکفام نوشت. بنابراین با این فرض میتوان میدانها را بصورت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\ ,\cdots\ , \tag{۸۶.۱}$$

نوشت که بخش حقیقی آنها میدانهای فیزیکی هستند. با جایگذاری آنها در معادلات ماکسول، دامنه های $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ و غیره در معادلات زیر صدق میکنند:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}-i\omega\mathbf{B}=0\ , \tag{آ۸۷.۱}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}+i\omega\mathbf{D}=0\ , \tag{ب۸۷.۱}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0\ , \tag{ج۸۷.۱}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0\ . \tag{د۸۷.۱}$$

برای محیطهای خطی همگن و همسانگرد که $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$، دو معادله اول (۸۷.۱) به صورت زیر در می آیند:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}-i\omega\mathbf{B}=0\ , \tag{۸۸.۱}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}+i\omega\epsilon\mu\mathbf{E}=0\ . \tag{۸۹.۱}$$

با ترکیب این دو معادله، معادلات موج هلمهولتز[۲۱] را بدست می آوریم:

$$(\boldsymbol{\nabla}^2+\epsilon\mu\omega^2)\left\{\begin{array}{c}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{array}\right\}=0\ . \tag{۹۰.۱}$$

به عنوان مثال اگر موج تخت پیش رونده در راستای z با وابستگی مکان-زمانی $e^{i(kz-\omega t)}$ را در نظر بگیریم، از معادله (۹۰.۱) رابطه ی بین عدد موج k و فرکانس زاویه ای ω بصورت زیر خواهد بود:

$$k=\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega\ . \tag{۹۱.۱}$$

این معادله به رابطه ی پاشندگی[۲۲]معروف است. شکل (۴.۱) بازه ی فرکانس و طول موج را در طیف امواج الکترومغناطیس نشان میدهد.

اگر $\epsilon\mu$ مستقل از فرکانس باشد محیط را غیرپاشنده[۲۳] و در غیر این صورت پاشنده [۲۴] گویند. سرعت فاز[۲۵] موج برابر است با

$$v_{ph}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}=\frac{c}{n}\ , \tag{۹۲.۱}$$

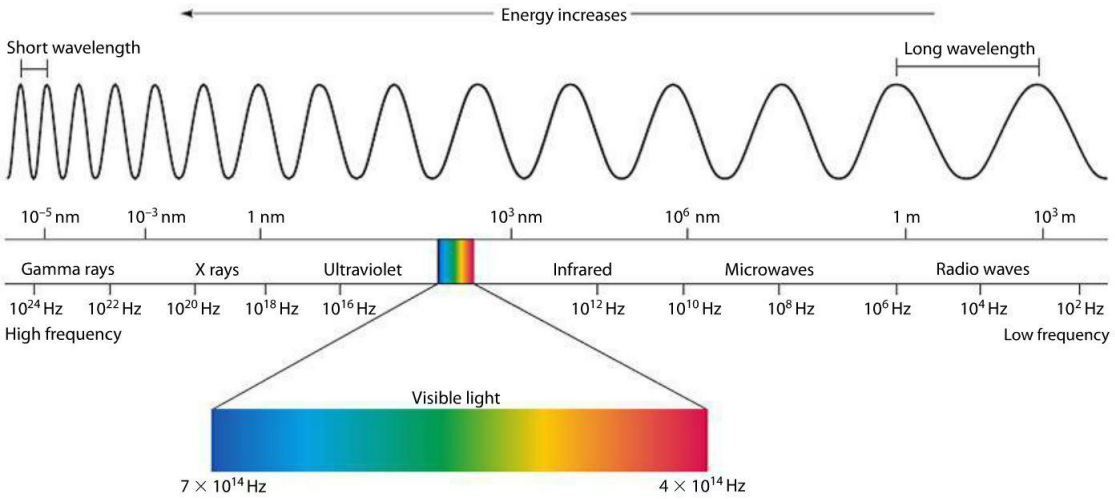
که در آن n ضریب شکست محیط بوده و برابر است با

$$n=\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}\geq 1\ . \tag{۹۳.۱}$$

ضریب شکست معمولا تابعی از فرکانس است و برای خلاء برابر یک است. از رابطه (۹۲.۱) واضح است که در محیطهای پاشنده امواج با فرکانسهای متفاوت سرعت های متفاوتی دارند. این واقعیت، اساس تجزیه نور سفید در منشور است. چرا که در منشور به عنوان یک محیط پاشنده، نورهای تشکیل دهنده نور سفید، از قرمز تا بنفش، بخاطر فرکانسهای مختلف سرعتهای متفاوتی داشته و از هم جدا میشوند.

---

[۲۰] monochromatic
[۲۱] Helmholtz
[۲۲] dispersion relation
[۲۳] non-dispersive
[۲۴] dispersive
[۲۵] phase velocity



شکل ۴.۱: بازه فرکانسی و طول موج برای طیف امواج الکترومغناطیسی.

۳.۲.۱ قطبش

حال یک موج الکترومغناطیس تخت تکفام با فرکانس زاویه ای ω و بردار موج $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ را در نظر میگیریم که $\mathbf{n}$ بردار یکه در راستای بردار $\mathbf{k}$ است. این موج علاوه بر معادله موج هلمهولتز (۹۰.۱) معادلات ماکسول را هم ارضا میکند. قیودی که توسط معادله هلمهولتز اعمال میشود سینماتیکی و قیود اعمالی توسط معادلات ماکسول دینامیکی است. حال امواج الکتریکی و مغناطیسی را بصورت زیر مینویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \boldsymbol{\mathcal{E}} e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \,, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \boldsymbol{\mathcal{B}} e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \,, \end{aligned} \tag{۹۴.۱}$$

که $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ و $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ بردارهای ثابتی هستند. با جایگذاری روابط بالا در معادلات (۶۹.۱ج) و (۶۹.۱د) به شرایط زیر میرسیم:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \,, \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \,, \tag{۹۵.۱}$$

که بیانگر این است که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هردو بر جهت انتشار موج، $\mathbf{n}$، عمود هستند. به چنین امواجی عرضی[۲۶] گوییم. همچنین معادلات (۷۲.۱) قید بیشتری را تحمیل میکنند:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{n}\times\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left(\frac{n}{c}\right)\mathbf{n}\times\boldsymbol{\mathcal{E}} \,. \tag{۹۶.۱}$$

از معادله ی بالا واضح است که بردارهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بر یکدیگر عمودند. شکل (۵.۱) را ببینید.

همچنین $\mathbf{E}$ و $c\mathbf{B}$ داری بعد یکسان بوده و در خلاء مقادیر یکسان دارند. به عبارتی بردارهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ تشکیل یک صفحه میدهند که بر مسیر انتشار عمود است. اگر این صفحه را با دو بردار یکه عمود بر هم $\boldsymbol{\epsilon_1}$ و $\boldsymbol{\epsilon_2}$ نشان دهیم مجموعه ی $(\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \mathbf{n})$ تشکیل یک مجموعه بردارهای یکه ی دو بدو عمود بر هم میدهند که در شکل (۶.۱) نشان داده شده است. به بردارهای $\boldsymbol{\epsilon_1}$ و $\boldsymbol{\epsilon_2}$ بردارهای قطبش گویند. در حالت کلی میتوان موج الکتریکی $\mathbf{E}$ را بر حسب بردارهای قطبش به صورت زیر نوشت:

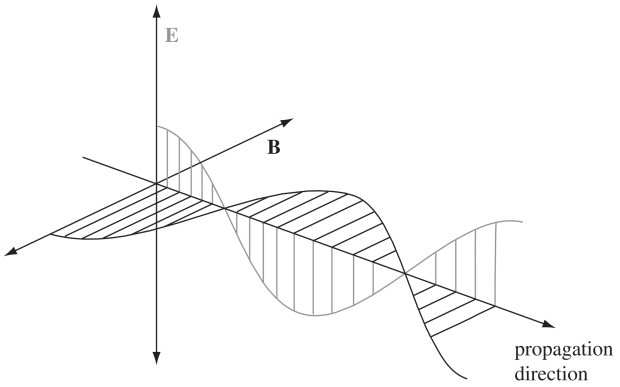
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (\boldsymbol{\epsilon_1}E_1 + \boldsymbol{\epsilon_2}E_2)e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \,, \tag{۹۷.۱}$$

و همچنین داریم:

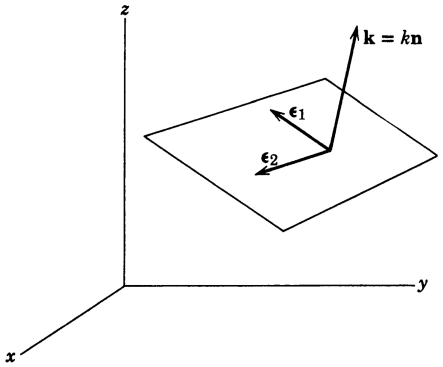
$$\mathbf{B}_j = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{n}\times\mathbf{E}_j \,, \quad j = 1,2 \,. \tag{۹۸.۱}$$

اگر دامنه های E_1 و E_2 حقیقی یا در حالت کلی هم فاز باشند، مکان هندسی قسمت حقیقی بردار $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ که همان میدان فیزیکی است در صفحات با فاز ثابت با گذشت زمان یک خط خواهد بود که دامنه ی آن $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ و زاویه آن با بردار قطبش $\boldsymbol{\epsilon_1}$ برابر است با $\theta = \tan^{-1}(E_2/E_1)$ که در شکل (۷.۱) نشان داده شده است.

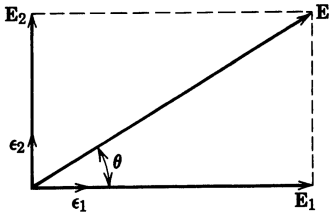
[۲۶] transverse



شکل ۵.۱: میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بر یکدیگر و بر جهت انتشار عمودند.



شکل ۶.۱: بردار انتشار $\mathbf{k}$ و بردارهای قطبش $\boldsymbol{\epsilon_1}$ و $\boldsymbol{\epsilon_2}$ که دو به دو بر هم عمودند.



شکل ۷.۱: میدان الکتریکی قطبش خطی

قسمت حقیقی (۹۷.۱) برای حالت خاص انتشار در راستای z برابر است با

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (E_1\boldsymbol{\epsilon_1} + E_2\boldsymbol{\epsilon_2})\cos(kz-\omega t)\ . \tag{۹۹.۱}$$

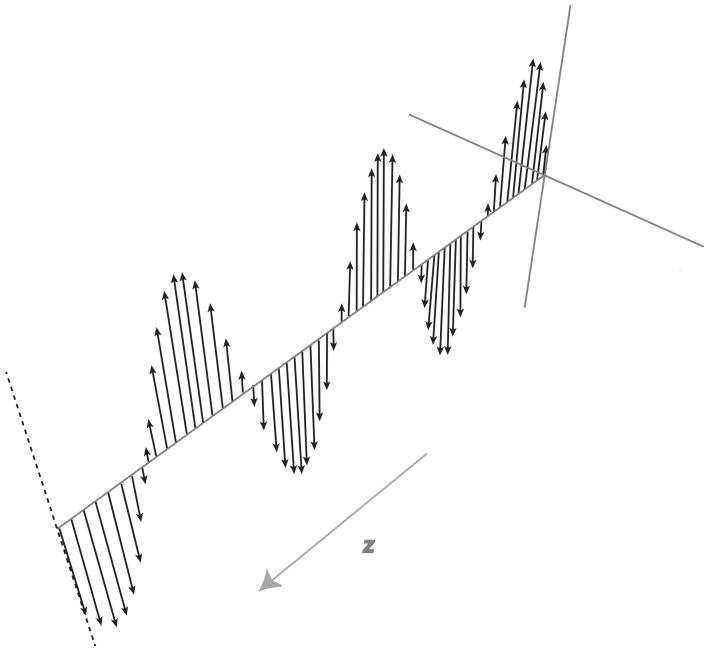
واضح است که بردار $\mathbf{E}$ با گذشت زمان روی یک خط که در شکل (۷.۱) مشخص شده است نوسان میکند. به همین علت گفته میشود که میدان دارای قطبش خطی است. همچنین میدانهای $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ به ترتیب دارای قطبش های افقی و عمودی هستند که حالت های خاصی از قطبش خطی هستند. برای حالت خاص قطبش عمودی، رفتار میدان الکتریکی با گذشت زمان در طول انتشار در راستای z در شکل (۸.۱) نشان داده شده است.

دامنه های E_1 و E_2 در حالت کلی مختلط هستند. اگر اختلاف فاز بین آنها δ باشد خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (\boldsymbol{\epsilon_1}E_1 + \boldsymbol{\epsilon_2}e^{i\delta}E_2)e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ . \tag{۱۰۰.۱}$$

در حالت خاص $\delta = \pm\pi/2$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (\boldsymbol{\epsilon_1}E_1 \pm i\boldsymbol{\epsilon_2}E_2)e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ . \tag{۱۰۱.۱}$$

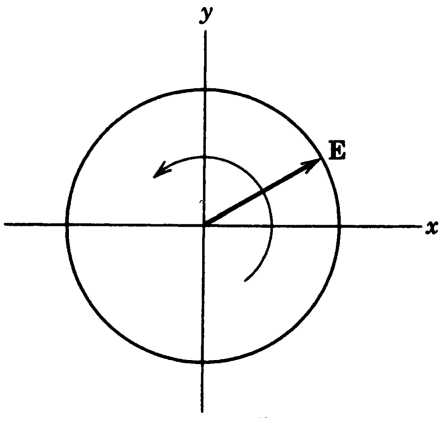


شکل ۸.۱: میدان با قطبش عمودی که در راستای z منتشر میشود.

میدانهای (۱۰۰.۱) و (۱۰۱.۱) داری قطبش بیضوی هستند. اگر $E_1 = E_2 = E$ داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E(\boldsymbol{\epsilon_1} \pm i\boldsymbol{\epsilon_2})e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \,, \tag{۱۰۲.۱}$$

که دارای قطبش دایره ای است. چراکه مکان هندسی بردار میدان الکتریکی با گذشت زمان دایره ای به شعاع E خواهد بود که بسته به علامت منفی یا مثبت بین $\boldsymbol{\epsilon_1}$ و $i\boldsymbol{\epsilon_2}$ به ترتیب در جهت ساعتگرد یا پادساعت‌گرد میچرخد. شکل (۹.۱) قطبش دایره ای پادساعتگرد را نشان میدهد. همچنین شکل (۱۰.۱) میدان الکتریکی با قطبش دایره ای ساعتگرد را در طول انتشار در راستای z



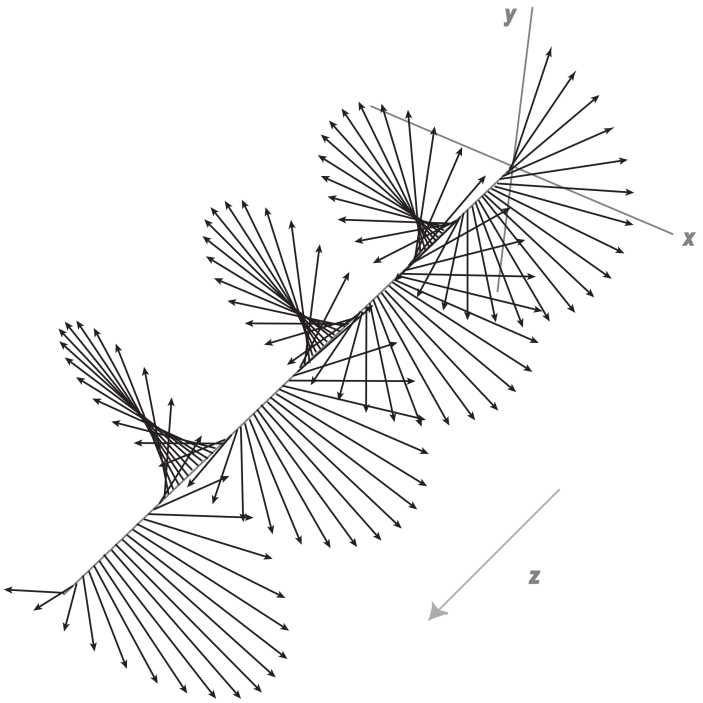
شکل ۹.۱: میدان با قطبش دایره ای پادساعتگرد $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E(\boldsymbol{\epsilon_1} + i\boldsymbol{\epsilon_2})e^{i(kz-\omega t)}$ که در راستای z منتشر میشود.

نشان میدهد. میتوان بردارهای قطبش دایره ای ساعتگرد و پادساعتگرد را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\epsilon_1} \pm i\boldsymbol{\epsilon_2}) \,, \tag{۱۰۳.۱}$$

و یک میدان الکتریکی بر حسب این بردارهای قطبش بصورت زیر بیان میشود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (E_+\boldsymbol{\epsilon}_+ + E_-\boldsymbol{\epsilon}_-)e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \,, \tag{۱۰۴.۱}$$



شکل ۱۰.۱: میدان با قطبش دایره ای ساعتگرد $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E(\boldsymbol{\epsilon_1} - i\boldsymbol{\epsilon_2})e^{i(kz-\omega t)}$ که در راستای z منتشر میشود.

که کاملا معادل بیان آن بر حسب قطبش های خطی $\boldsymbol{\epsilon_1}$ و $\boldsymbol{\epsilon_2}$ است. به عبارتی مجموعه بردارهای یکه ی دو به دو عمود بر هم $(\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \mathbf{n})$ و $(\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_-, \mathbf{n})$ پایه های متفاوت و معادلی برای بیان انتشار امواج الکترومغناطیسی هستند.

برای امواج تخت در خلاء چگالی انرژی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) = \epsilon_0 E^2 \ . \tag{۱۰۵.۱}$$

همچنین بزرگی بردار پوینتینگ برابر است با

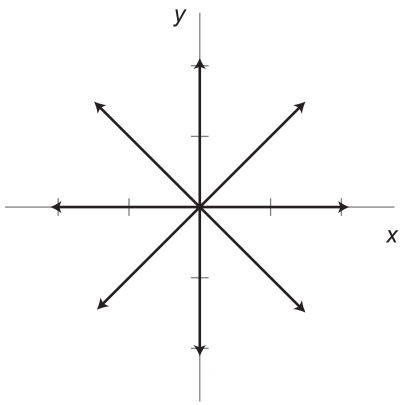
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = cu\mathbf{n} \ . \tag{۱۰۶.۱}$$

جهت بردار پوینتینگ همان جهت انتشار انرژی الکترومغناطیسی است.

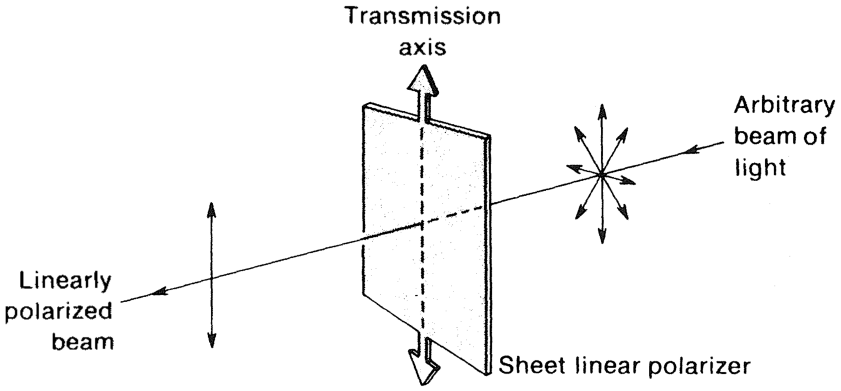
امواج الکترومغناطیسی در حالت کلی ناقطبیده هستند. یعنی مانند شکل (۱۱.۱) میدان الکتریکی در صفحات با فاز ثابت در همه ی جهات وجود دارد. یکی از مهمترین مثالهای امواج الکترومغناطیسی ناقطبیده نور خورشید است. یک موج با قطبش خطی را میتوان با عبور یک موج ناقطبیده از یک قطبنده[۲۷] ی خطی تولید کرد. قطبنده ها صفحاتی هستند که از موادی تشکیل شده اند که فقط اجازه ی عبور امواج الکترومغناطیسی که در یک جهت خاص (عمودی یا افقی) هستند را میدهند. بدین ترتیب موج خروجی از این قطبنده ها داری قطبش خطی است. شکل (۱۲.۱) را ببینید. یک مثال از قطبنده ها عینک های آفتابی هستند. این عینک ها با حذف قسمت اعظم موج الکترومغناطیسی، نور ناقطبیده ی خورشید را به نوری با قطبش خطی تبدیل میکنند و بدین وسیله از شدت نور ورودی به چشم میکاهند. اگر قطبنده ای با قطبش عمودی را در مقابل نوری با قطبش افقی قرار دهیم، هیچ نوری عبور نکرده و خروجی آن تاریک خواهد بود. اما اگر قطبنده را ۹۰ درجه بچرخانیم نور عبور کرده و منبع نور را خواهیم دید. این را به کمک یک عینک آفتابی و اعداد یک ساعت رقمی[۲۸] (که قطبش نورش خطی است) امتحان کنید.

یک ابزار مناسب دیگر برای تولید امواج با قطبش خطی یک قطعه بلور کلسیت است که به طور مناسبی بریده و صیقل خورده باشد. (شکل (۱۳.۱) را ببینید.) با یک بلور کلسیت با کیفیت که به خوبی صیقل خورده باشد، تقریبا همه ی موج ورودی عبور میکند به قسمی که مجموع شدت پرتوهای خروجی برابر شدت پرتو ورودی است. مطابق شکل (۱۴.۱)، اگر پرتو نوری ناقطبیده

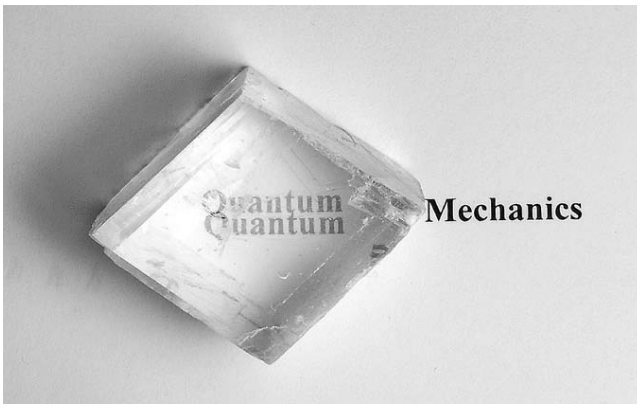
[۲۷] polaroid
[۲۸] digital



شکل ۱۱.۱: میدان ناقطبیده منتشر شونده در راستای z: در صفحه ی فاز ثابت میدان در همه ی جهات وجود دارد.



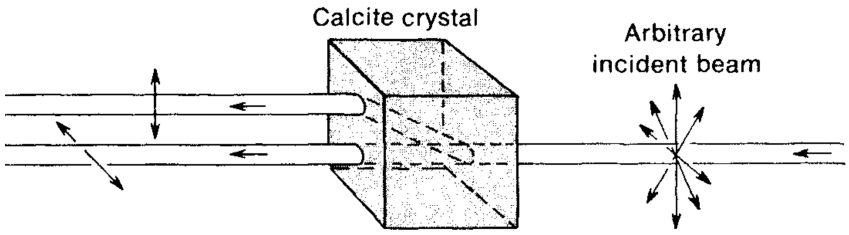
شکل ۱۲.۱: تولید موج با قطبش خطی از یک موج ناقطبیده بوسیله یک قطبنده با محور قطبش عمودی.



شکل ۱۳.۱: نور عبوری از بلور کلسیت به دو موج موازی با قطبش های عمود بر هم تجزیه میشود. به دو تصویر Quantum نگاه کنید.

از این بلور عبور کند بصورت کلی به دو پرتو موازی با قطبش های عمود بر هم تجزیه میشود که نسبت به هم کمی جابجا شده اند. اگر یکی از خروجی ها را مسدود کنیم یک نور با قطبش خطی خواهیم داشت. در این حالت بلور کلسیت به عنوان یک تصویرگر[۲۹] عمل میکند. چرا که نور ناقطبیده ی ورودی را به یک نور با قطبش خطی معین تصویر کرده است. اما اگر به هر دو خروجی اجازه عبور دهیم بلور کلسیت به عنوان ابزاری که بعدا به آن تحلیلگر قطبش خطی[۳۰] خواهیم گفت عمل خواهد کرد. زیرا نور ناقطبیده ی ورودی را به دو نور با قطبش خطی متعامد تجزیه کرده است.

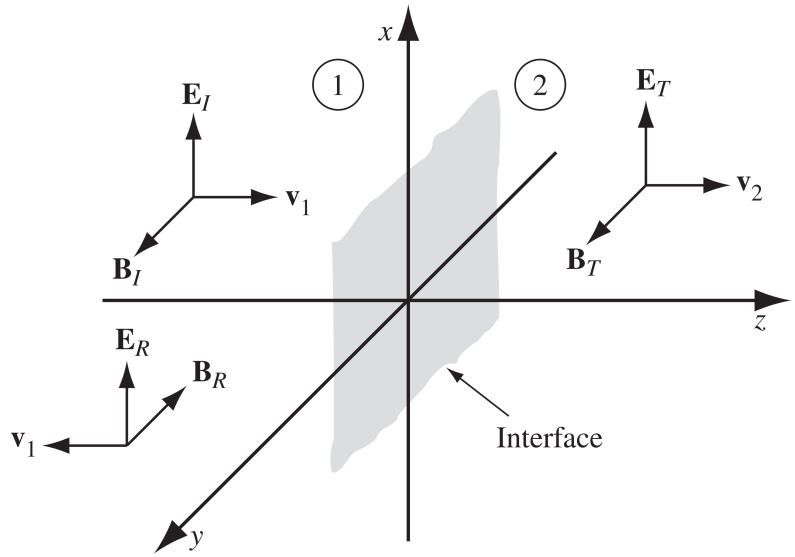
[۲۹] projector
[۳۰] linear polarization analyzer



شکل ۱۴.۱: شمای کلی یک تحلیلگر قطبش خطی

۴.۲.۱ امواج در مرز دو محیط

نور در هنگام انتشار ممکن است از محیطی به محیط دیگر وارد شود. رفتار موج در مرز محیطها علاوه بر ویژگیهای موج، به جنس دو محیط هم بستگی دارد. در اینجا حالت خاص تابش عمودی را بررسی میکنیم. مطابق شکل (۱۵.۱) فرض میکنیم موج در راستای z منتشر شده و مرز دو محیط صفحه ی xy باشد. میدانهای موج فرودی با قطبش خطی در راستای $\hat{\mathbf{x}}$ که بصورت



شکل ۱۵.۱: امواج فوردی، بازتابی و انتقالی در تابش عمودی در مرز دو محیط ۱ و ۲. سرعتهای نشان داده شده در جهت بردار انتشار موج هستند.

عمودی از سمت چت به مرز دو محیط نزدیک میشود برابرند با

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_I(z,t) &= E_{0I}e^{i(k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{x}}\,,\\ \mathbf{B}_I(z,t) &= \frac{k_1}{\omega}E_{0I}e^{i(k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}\,.\end{aligned} \qquad (۱۰۷.۱)$$

بنابراین موج بازتابی برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R(z,t) &= E_{0R}e^{i(-k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{x}}\,,\\ \mathbf{B}_R(z,t) &= -\frac{k_1}{\omega}E_{0R}e^{i(-k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}\,,\end{aligned} \qquad (۱۰۸.۱)$$

که در جهت برعکس وارد محیط ۱ میشود و موج انتقالی

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T(z,t) &= E_{0T}e^{i(k_2 z-\omega t)}\hat{\mathbf{x}}\,,\\ \mathbf{B}_T(z,t) &= \frac{k_2}{\omega}E_{0T}e^{i(k_2 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}}\,,\end{aligned} \qquad (۱۰۹.۱)$$

که وارد محیط ۲ شده و به سمت راست منتشر میشود. با در نظر گرفتن پیوستگی میدانها در مرز دو محیط $(z=0)$ بعلاوه ی شرایط مرزی که از معادلات ماکسول منتج میشود روابط زیر بین دامنه های امواج فرودی، بازتابی و انتقالی بدست می آید:

$$E_{0R} = \Big(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\Big) E_{0I} \ , \tag{۱۱۰.۱آ}$$

$$E_{0T} = \Big(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\Big) E_{0I} \ , \tag{۱۱۰.۱ب}$$

که n_1 و n_2 به ترتیب ضرایب شکست محیط های ۱ و ۲ هستند.

دو نکته ی مهم از معادلات بالا بدست می آید:

۱. بنا بر معادله ی (۱۱۰.۱آ) اگر $n_2 > n_1$، یعنی محیط دوم از محیط اول غلیظتر باشد، موج بازتابی در فاز متقابل با موج فرودی است و π رادیان با آن اختلاف فاز دارد. در حالیکه اگر $n_2 < n_1$ باشد موج بازتابی با موج فرودی هم فاز هستند.

۲. از معادله ی (۱۱۰.۱ب) واضح است که موج انتقالی، مستقل از مقدار ضریب شکست دو محیط، همواره با موج فرودی همفاز است. از این دو نتیجه بعدا در تحلیل آزمایش ماخ-زندر استفاده خواهیم کرد.

۵.۲.۱ هامیلتونی ذره ی باردار در میدان الکترومغناطیسی

شناخت ما از ذرات اتمی و زیر اتمی، و همچنین برخی ویژگی های کوانتومی سامانه های اتمی از راه مطالعه ی اتمها، یونها و ذرات باردار در میدان الکترومغناطیسی بدست می آیند. به همین دلیل بدست آوردن لاگرانژی و هامیلتونی یک ذره ی باردار نوعی (که میتواند الکترون، اتم یونیزه شده یا هسته ی اتم باشد) در حضور میدان های الکتریکی و مغناطیسی برای بررسی رفتار رفتار این ذرات ضروری است.

نقطه ی شروع کار معادله ی حرکت یک ذره ی باردار با بار q و جرم m تاثیر نیروی لورنتس (۷۵.۱) است:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\big[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\big] \ , \tag{۱۱۱.۱}$$

که در حالت کلی میدانها تابعی از مکان و زمان هستند. نوشتن لاگرانژی برای این سامانه بر حسب میدانها کار چندان سرراستی نیست و بهتر است با پتانسیل های برداری (۷۶.۱آ) و نرده ای (۷۶.۱ب) کار را ادامه دهیم.

ابتدا لاگرانژی زیر را حدس میزنیم:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\Phi(\mathbf{r},t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \ , \tag{۱۱۲.۱}$$

و وارسی میکنیم که آیا معادله ی حرکت (۱۱۱.۱) را بدست میدهد یا خیر. در اینجا $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ و $\Phi(\mathbf{r},t)$ متغیرهای دینامیکی نبوده و میدانهای خارجی هستند. با مقایسه با معادله ی (۷.۱) مختصه های تعمیم یافته ی q_i همان مولفه های بردار $\mathbf{r}$ یعنی x_i خواهد بود. بنابراین برای لاگرانژی (۱۱۲.۱) داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \Phi(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} + q\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\frac{\partial A_j(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} \ , \tag{۱۱۳.۱}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{r},t) \ , \tag{۱۱۴.۱}$$

و بنابراین

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + q\frac{\partial A_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} + q\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i(\mathbf{r},t)}{\partial x_j}\dot{x}_j \ . \tag{۱۱۵.۱}$$

با جایگذاری (۱۱۳.۱) و (۱۱۵.۱) در معادله ی اویلر-لاگرانژ (۱۱.۱) به معادله ی حرکت زیر میرسیم:

$$m\ddot{x}_i = -q\frac{\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} - q\frac{\partial A_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} + q\sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\left[\frac{\partial A_j(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(\mathbf{r},t)}{\partial x_j}\right] \ . \tag{۱۱۶.۱}$$

جمله ی سوم سمت راست معادله ی بالا را میتوان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{3} \dot{x_j} \left[\frac{\partial A_j(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(\mathbf{r},t)}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^{3} \dot{x_j} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \big[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \big]_k = \big[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \big]_k , \quad (۱۱۷.۱)$$

که ϵ_{ijk} تانسور کاملا پادمتقارن لویچویتا با مقدار $\epsilon_{123} = 1$ است و بنابراین معادله ی حرکت (۱۱۶.۱) حاصله از لاگرانژی (۱۱۲.۱) با معادله حرکت (۱۱۱.۱) برابر است.

حال برای بدست آوردن هامیلتونی باید تکانه ی مزدوج با مختصه ی x_i را بدست بیاوریم که خواهیم داشت:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{r},t) , \quad (۱۱۸.۱)$$

و بنابراین

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \Big[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \Big] . \quad (۱۱۹.۱)$$

پس با توجه به معادله ی (۴۷.۱) هامیلتونی بصورت زیر خواهد بود:

$$H = \frac{1}{2m} \Big[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \Big]^2 + q\Phi(\mathbf{r},t) . \quad (۱۲۰.۱)$$

با مقایسه با هامیلتونی ذره در غیاب میدان الکترومغناطیسی

$$H_{\text{free}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} , \quad (۱۲۱.۱)$$

به این نتیجه میرسیم که برای نوشتن هامیلتونی ذره در حضور میدان الکترومغناطیسی، تکانه ی $\mathbf{p}$ مزدوج با مختصه به صورت زیر تعمیم پیدا میکند:

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t) . \quad (۱۲۲.۱)$$

۳.۱ ترمودینامیک و مکانیک آماری

تا بدینجا سامانه هایی را بررسی کردیم که تک ذره ای بوده یا فارغ از تعبیر ذره ی و دارای خاصیت موجی بوده اند. اما عموم سامانه های فیزیکی چند ذره ای و در حقیقت دارای تعداد بسیار زیادی ذره از مرتبه عدد آووگادرو

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} , \quad (۱۲۳.۱)$$

هستند. طبیعتا حل معادلات حرکت برای تک تک ذرات چنین سامانه هایی غیر ممکن است. به عنوان یک محاسبه ی سردستی اگر سامانه ای 10^{24} ذره داشته باشد دارای همین تعداد معادله دیفرانسیل مرتبه دو همبسته با دیگر ذرات سامانه است. اگر رایانه ای بسیار قوی در دسترس داشته باشیم که برای حل هر تک معادله دیفرانسیل فقط یک ثانیه زمان صرف کند، تحلیل چنین سامانه ای در حدود

$$t_{\text{calc}} = \frac{10^{24}}{1 \text{ eq/sec} \times 86400 \text{ sec/day} \times 356 \text{ day/year}} = 3.17 \times 10^{16} \text{ year} , \quad (۱۲۴.۱)$$

زمان میبرد که بیش از دو میلیون برابر عمر جهان است! پس لازم است راهی برای بررسی چنین سامانه هایی که اتفاقا در اطراف ما فراوان هستند بیابیم.

ترمودینامیک و مکانیک آماری یکی از مهمترین شاخه های فیزیک هستند که برای تحلیل چنین سامانه های بزرگ مقیاس و پرذره ای ساخته شده اند. در ترمودینامیک بجای بررسی ویژگی تک تک ذرات سامانه، خواصی از سامانه را مورد مطالعه قرار

میدهیم که نمایانگر سامانه به عنوان یک کل باشد و با تعیین آنها ویژگی های فیزیکی سامانه کم و بیش شناخته شود. این کمیتها عبارتند از گرم، دما، حجم، فشار، آنتروپی و ... . در مکانیک آماری، همانگونه که نامش پیداست، با روشهای آماری و به نوعی میانگین گیری از ویژگیهای تک تک ذرات سامانه کمیت های ترمودینامیکی فوق را بدست می آوریم.

مرور این شاخه از فیزیک در اینجا از آن رو اهمیت دارد که اولا نخستین نشانه های کاستی فیزیک کلاسیک در توصیف سامانه های فیزیکی از مطالعات ترمودینامیکی تابش جسم سیاه بدست آمد و کوانتوم انرژی به عنوان اولین سنگ بنای مکانیک کوانتومی از رهیافت مکانیک آماری ظهور یافت. بعلاوه ترمودینامیک و قوانین آن و بویژه مکانیک آماری تنها شاخه ای از فیزیک کلاسیک هستند که در انقلابهای کوانتوم و نسبیت دستخوش تغییر نشده و ساختار و اصول اولیه خود را حتی در بنیادی ترین سطوح فیزیک هم حفظ کرده اند و همچنان به عنوان چراغ راه فیزیک پیشگان در مطالعه ویژگی های بنیادین طبیعت به کار میروند. از این رو در این بخش مروری هرچند سریع بر این این شاخه از فیزیک کلاسیک خواهیم داشت.

۱.۳.۱ قانون صفرم ترمودینامیک

قبل از بیان قوانین ترمودینامیک، کمیت های ترمودینامیکی که با آنها سر و کار خواهیم داشت را به اختصار معرفی میکنیم. این کمیت ها عموما برای یک تک ذره قابل تعریف نبوده یا حداقل خوش تعریف نیستند و عموما بیانگر رفتار کلی یک سامانه با تعداد ذرات زیاد (از مرتبه عدد آووگادرو) هستند. این کمیت ها برای شناخت خواص بزرگ مقیاس[۳۱] سامانه های ترمودینامیکی در حالت تعادل کفایت میکند و مستقل از جزییات ریز مقیاس[۳۲] سامانه هستند. به رابطه ی بین این کمیت ها **معادله ی حالت**[۳۳] گوییم.

گرما

همه ی ما از گرما یک دریافت حسی داریم. هرگاه دست خود را نزدیک آتش بگیریم احساس ورود گرما به بدن کرده و هرگاه قطعه ای یخ را در دست بگیریم احساس خروج گرما از بدن یا همان سرما را خواهیم داشت. در اینجا تعریف زیر را از گرما ارایه میدهیم: **گرما نوعی انرژی است که از جسمی به جسم دیگر منتقل میشود.** در اینجا دو نکته قابل توجه است. اولا گرما نوعی از انرژی است. و ثانیا این انرژی از جسمی به جسم دیگر **منتقل میشود**. به عبارتی نمیتوانیم بگوییم یک جسم دارای فلان مقدار گرماست. بلکه یک جسم در ارتباط با جسمی دیگر مقدار معینی انرژی را به صورت گرما منتقل کرده یا از آن دریافت میکند. به عبارتی گرما زمانی معنا دارد که منتقل شود. واحد گرما همانند دیگر انواع انرژی ژول است.

دما

فرض کنید دو سامانه با هم در تعادل گرمایی باشند. یعنی میزان گرمایی که از جسم ۱ به ۲ منتقل میشود برابر بار میزان گرمایی باشد که از ۲ به ۱ انتقال میابد. در این حالت کمیتی وجود دارد که در هر دو جسم با هم برابر و بیانگر این نوع تعادل است. به این کمیت دما گوییم. به عبارتی **دما کمیتی است که وقتی دو جسم با هم در تعادل گرمایی باشند در هر دو جسم با هم برابر است.** وقتی هم دمای جسمی را بیان میکنیم در حقیقت تعادل گرمایی آن جسم را با جسم دومی که آن را دماسنج مینامیم بیان کرده ایم. واحد دما کلوین، K، یا درجه سلسیوس ، $^\circ C$، است و داریم:

$$T(^\circ\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273.15\ . \qquad (۱۲۵.۱)$$

در فیزیک بر خلاف روزمره عموما از واحد دمای کلوین استفاده میشود.

قانون صفرم ترمودینامیک

دو سامانه که بصورت جداگانه با سامانه ی سومی در تعادل گرمایی هستند، با یکدیگر در تعادل گرمایی اند.

به عبارتی این قانون دما را به عنوان یک ابزار مقایسه ی تعادل گرمایی معرفی میکند.

ظرفیت گرمایی

در تجارب روزمره ی خود دیده ایم که دمای برخی اجسام با اندکی گرما به سرعت افزایش میابد و برخی دیگر برای همان میزان افزایش دما به گرمای بیشتری نیاز دارند. این واقعیت را به کمک کمیتی به نام ظرفیت گرمایی بیان میکنیم. بدین ترتیب که

[۳۱] macroscopic
[۳۲] microscopic
[۳۳] equation of state

اگر برای افزایش دما جسم به اندازه ی dT به میزان dQ گرما نیاز داشته باشیم خواهیم داشت $dQ = CdT$ که این ضریب تناسب را ظرفیت گرمایی گوییم. به عبارتی:

$$C = \frac{dQ}{dT} . \tag{۱۲۶.۱}$$

بصورت کلی ظرفیت گرمایی تابعی از دماست.

۲.۳.۱ قانون اول ترمودینامیک

قانون اول ترمودینامیک بیانگر بقای انرژی در حین تبدیل انواع انرژی از قبیل انرژی گرمایی، مکانیکی، شیمیایی و انرژی درونی به یکدیگر است. **انرژی درونی** مجموع تمام انرژی های درجات آزادی داخلی یک سامانه است. قبل از بیان دقیق قانون کمیت فشار را تعریف میکنیم. این کمیت در تعریف کار انجام شده روی سامانه ترمودینامیکی ظاهر میشود.

فشار

یکی از مهمترین کمیت های ترمودینامیکی فشار است که در تعریف اولیه برابر است با نیرو عمودی وارده بر واحد سطح:

$$P = \frac{F}{A} . \tag{۱۲۷.۱}$$

واحد فشار پاسکال است که $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$. بنابراین فشار یک شاره برابر است با نیروی عمودی وارده از طرف شاره بر دیواره های محفظه ی آن. بدین ترتیب کار مکانیکی که شاره روی محفظه اش انجام میدهد تا حجم آن را به اندازه ی dV تغییر دهد برابر است با $dW = PdV$. حال میتوانیم قانون اول را بصورت دقیق تعریف کنیم.

قانون اول ترمودینامیک

تغییرات انرژی داخلی یک سامانه برابر با مجموع تغییرات انرژی گرمایی و کار انجام شده **بر روی** آن سامانه است. به عبارتی:

$$dU = đQ + đW . \tag{۱۲۸.۱}$$

علامت $đ$ بیانگر این است که تغییرات کار و گرما دیفرانسیل کامل نیستند و به عبارتی انتگرال آنها علاوه بر نقاط ابتدا و انتها، به ترتیب به مسیر انجام کار و فرایند گرمایش بستگی دارند. البته مجموع آنها یعنی تغییرات انرژی داخلی dU دیفرانسیل کامل است یعنی تغییرات انرزی داخلی فقط تابعی از انرژی داخلی اولیه و نهایی است و به فرآیندهای میانی بستگی ندارد.

چون کار انجام شده بر روی سامانه قرینه کاری است که سامانه انجام میدهد،

$$đW \leq -PdV , \tag{۱۲۹.۱}$$

که تساوی برای فرآیندهای برگشت پذیر برقرار است.

فرآیند گرمایش میتواند در حجم ثابت یا در فشار ثابت اتفاق بیفتد. شکل (۱۶.۱) شمایی از این دو فرآیند را نشان میدهد.

بدین ترتیب ظرفیت گرمایی میتواند در حجم یا فشار ثابت به طریق زیر تعریف شود:

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V , \tag{۱۳۰.۱}$$

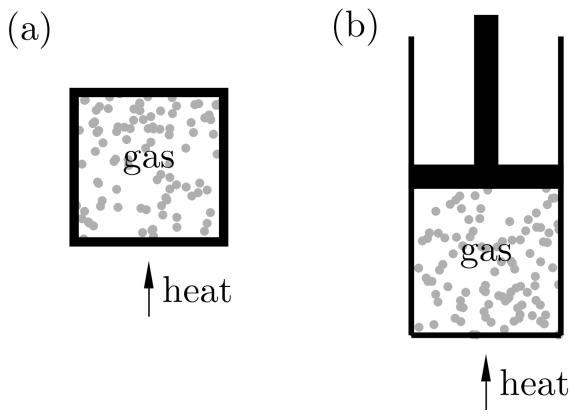
$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P . \tag{۱۳۱.۱}$$

به کمک قانون اول ترمودینامیک (؟؟) میتوان نشان داد که ظرفیتهای گرمایی در حجم و فشار ثابت از روابط زیر تبعیت میکنند:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V , \tag{۱۳۲.۱}$$

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P . \tag{۱۳۳.۱}$$

تمرین ۵.۱. برای گاز ایده آل تک اتمی، انرژی داخلی $U = \frac{3}{2}RT$ و معادله ی حالت $PV = nRT$ میباشد که $R = 8.314\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$ ثابت عمومی گازهاست. ثابت کنید برای هر مول از این گاز $C_V = \frac{3}{2}R$ و $C_P = \frac{5}{2}R$.



شکل ۱۶.۱: فرآیندهای گرمایش (a) هم حجم و (b) هم فشار

۳.۳.۱ قانون دوم ترمودینامیک

قانون اول ترمودینامیک درباره بقای انرژی و تبدیل انواع انرژی به یکدیگر است. هر فرآیندی که ناقض این قانون باشد غیر ممکن است. اما این قانون بیان گر این نیست که هر فرآیندی که آن را نقض نکند حتما اتفاق می افتد. به عنوان مثال انتقال خودبخودی گرما از جسم سرد به جسم گرم، که باعث سردتر شدن جسم سرد و گرمتر شدم جسم گرم میشود از دید قانون اول کاملا امکان پذیر است اما هیچگاه در طبیعت چنین چیزی مشاهده نشده است. آنچه تجربه ی روزمره ی ما نشان میدهد آن است که **همواره** گرما از جسم گرمتر به جسم سردتر منتقل میشود و فرآیند معکوس آن **غیرممکن است**. این ناممکن بودن به ما نشان میدهد که حتما قانونی طبیعی جلوی رخداد چنین فرآیندهایی را گرفته است و آن قانون دوم ترمودینامیک است. این قانون عملا جهت شارش انرژی را معین میکند. بیانهای مختلفی از این قانون وجود دارد که با هم معادلند. ما در اینجا دو بیان کلاوسیوس و کلوین را ارایه میدهیم.

قانون دوم ترمودینامیک (بیان کلاوسیوس)

هر فرآیندی که نتیجه ی خالص آن انتقال گرما از جسم سردتر به جسم گرمتر باشد ناممکن است.

قانون دوم ترمودینامیک (بیان کلوین)

هر فرآیندی که نتیجه ی خالص آن تبدیل کامل گرما به کار باشد غیر ممکن است.

برخی فرآیندها برگشت پذیر و برخی برگشت ناپذیر هستند. کمیتی که میتوان به کمک آن این فرآیندها را بخوبی دسته بندی کرد آنتروپی S است. آنتروپی به صورت زیر تعریف میشود:

$$dS = \frac{đQ_{\rm rev}}{T} \,, \tag{۱۳۴.۱}$$

که در آن $Q_{\rm rev}$ گرمای مبادله شده در فرآیند برگشت پذیر است. بنابراین

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{đQ_{\rm rev}}{T} \,, \tag{۱۳۵.۱}$$

و بنابراین اگر حالت ابتدایی و نهایی یکسان باشند داریم:

$$\oint \frac{đQ_{\rm rev}}{T} = 0 \,. \tag{۱۳۶.۱}$$

در حالت کلی

$$\oint \frac{đQ}{T} \leq 0 \,, \tag{۱۳۷.۱}$$

که مساوی طبق رابطه ی (۱۳۶.۱) برای فرآیندهای برگشت پذیر و نامساوی برای فرآیندهای برگشت ناپذیر برقرار است. بر این اساس میتوان نشان داد که رابطه ی اساسی زیر برای خالص فرآیندهای هر سامانه ی بسته ای برقرار است:

$$\Delta S \geq 0 \,, \tag{۱۳۸.۱}$$

که مساوی برای فرآیندهای برگشت پذیر و نامساوی برای فرآیندهای برگشت ناپذیر است. خالص فرآیندهای یک سامانه بسته که در آنها $\Delta S < 0$ ناممکن هستند.

با توجه به تعریف آنتروپی میتوان قانون اول را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$dU = TdS - PdV \,, \tag{۱۳۹.۱}$$

که با توجه به آن روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} T &= \Big(\frac{\partial U}{\partial S}\Big)_V \,, \\ P &= -\Big(\frac{\partial U}{\partial V}\Big)_S \,. \end{aligned} \tag{۱۴۰.۱}$$

۴.۳.۱ ریزحالت ها و درشت حالت ها

یک سامانه ی ترمودینامیکی، مثلا یک ظرف حاوی گازی ایده آل را در نظر بگیرید. در تعادل، حالت این گاز با متغیرهای حالتی نظیر انرژی داخلی، دما، آنتروپی، فشار، حجم و ... معین میشود. به هر مجموعه از این متغیرهای حالت که حالت ترمودینامیکی سامانه را بصورت یکتا تعیین میکنند یک درشت حالت[۳۴] گویند. مثلا اگر گاز را در حجم ثابت حرارت دهیم، انرژی داخلی، دما، فشار و آنتروپی آن تغییر میکند و مجموعه این متغیرها مقادیر جدیدی اتخاذ میکنند و سامانه ی ما در حالت ترمودینامیکی جدیدی قرار میگیرد. به عبارتی هر مجموعه از درشت حالت ها متناظر با یک حالت ترمودینامیکی متفاوت از سامانه است.

از طرفی این ظرف گاز، متشکل از تعداد زیادی اتم است که هر کدام جداگانه میتوانند انرژی، مکان و تکانه ی معینی داشته باشند که با گذشت زمان تغییر میکنند. به هر مجموعه ی متفاوت از این متغیرها که حالت تک تک اجزای تشکیل دهنده سامانه را تعیین میکنند ریزحالت[۳۵] گویند. در حالت تعادل، متغیرهای ترمودینامیکی ثابت هستند و به عبارتی درشت حالت سامانه تغییر نمیکند . اما اتمهای گاز مرتبا حرکت کرده و بین آنها تبادل انرژی و تکانه صورت میگیرد و در هر لحظه یک ریزحالت جدید ساخته میشود. بنابراین تعداد زیادی ریزحالت متفاوت متناظر با یک درشت حالت هستند. مرسوم است که تعداد ریزحالتهای سامانه را با Ω نشان میدهند که در حالت کلی تابعی از انرژی، حجم و تعداد ذرات تشکیل دهنده ی سامانه است.

حال سوال مهم اینجاست که چگونه با دانستن با به عبارتی شمارش ریزحالتهای متناظر با یک درشت حالت معین میتوانیم ویژگی های ترمودینامیکی سامانه را بدست آوریم؟ این موضوع اساسی مکانیک آماری است و با رابطه زیر که به رابطه بولتزمان معروف است نشان داده میشود:

$$S = k_B \ln \Omega \,, \tag{۱۴۱.۱}$$

که در آن

$$k_B = 1.380 \times 10^{-23} \mathrm{J.K}^{-1} \,, \tag{۱۴۲.۱}$$

ثابت بولتزمان است.

فرض بر این است که هیچ ریزحالت مرجحی وجود ندارد و احتمال انتخاب تمام ریزحالتها توسط سامانه با هم برابر است. بنابراین احتمال رخداد درشت حالتی که به ریزحالتهای بیشتری نظیر شده باشد بیشتر است. از این رو حالت تعادل حالتی است که تعداد ریزحالتهای آن بیشینه باشد. حال برای محاسبه ی احتمال انتخاب یک حالت توسط سامانه، باید بارها و بارها[۳۶] سامانه را در شرایط یکسان مورد آزمایش قرار دهیم تا بتوانیم احتمال رخداد هر حالت را بدست آوریم. راه دیگر این است که بجای بارها

[۳۴] macrostate
[۳۵] microstate
[۳۶] بصورت نظری بینهایت بار

آزمایش روی یک سامانه، نسخه های یکسانی از سامانه ی مورد نظر را بصورت ذهنی در نظر گرفته و روی هرکدام از آنها یک بار آزمایش را انجام دهیم. به مجموعه ی این نسخه های ذهنی از یک سامانه **هنگرد**[۳۷] گویند.

اگر اعضای یک هنگرد همگی دارای انرژی ثابت باشند، آن هنگرد را هنگرد ریزکانونی[۳۸] گویند. اگر اعضای هنگرد دارای دمای ثابت باشند که بدین معناست که در تماس و تبادل انرژی با یک منبع گرمایی با دمای ثابت هستند، بدان هنگرد کانونی[۳۹] گویند. و اگر هنگرد علاوه بر انرژی، با منبع گرمایی تبادل ذرات هم داشته باشد بدان هنگرد بزرگ کانونی[۴۰] گویند. چون معمولا اندازی گیری دما و ثابت نگه داشتن آن راحت تر از انرژی است، تا زمانی که تبادل ذرات مد نظر نباشد، هنگرد کانونی مناسب ترین راه برای مطالعه ی ویژگی های یک سامانه ی ترمودینامیکی است.

۵.۳.۱ هنگرد کانونی

در هنگرد کانونی احتمال اینکه انرژی سامانه در بازه ی E و $E+dE$ قرار بگیرد به خود انرژی و دما بستگی دارد:

$$d\Pr(E) = \rho(E)dE = Ce^{-\frac{E}{k_BT}}\, dE\,, \tag{۱۴۳.۱}$$

که $\Pr(E)$ احتمال، $\rho(E)$ چگالی احتمال، و این وابستگی نمایی به فاکتور بولتزمان معروف است. C ثابتی است که به آن ثابت بهنجارش[۴۱] گویند و باید به طریقی تعیین شود که مجموع احتمالات برابر یک باشد، یعنی

$$\int d\Pr(E) = \int_0^\infty dE\rho(E) = 1\,, \tag{۱۴۴.۱}$$

که به آن **شرط بهنجارش**[۴۲] گویند. بنابراین

$$d\Pr(E) = \rho(E)dE = \frac{e^{-\frac{E_i}{k_BT}}}{\int_0^\infty dE\, e^{-\frac{E_i}{k_BT}}}dE\,. \tag{۱۴۵.۱}$$

پس انرژی داخلی U، که میانگین تمام انرژیهای E است که سامانه میتواند داشته باشد برابر است با

$$U = \langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty dEEe^{-\frac{E}{k_BT}}}{\int_0^\infty dEe^{-\frac{E}{k_BT}}}\,. \tag{۱۴۶.۱}$$

چون انرژی یا همان هامیلتونی، $H(q,p)$، تابعی از مختصات و تکانه است، میتوان بجای انرژی روی فضای فاز انتگرال گرفت و مانند انرژی، میانگین هر کمیت دلخواه دیگری مثل f را بدست آورد:

$$\langle f\rangle = \frac{\int dqdp\, f(q,p)e^{-\frac{H(q,p)}{k_BT}}}{\int dqdp\, e^{-\frac{H(q,p)}{k_BT}}}\,, \tag{۱۴۷.۱}$$

که $dqdp = dq_1\cdots dq_ndp_1\cdots dp_n$ و $f(q,p) = f(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$.

حاصل جمع تمامی فاکتورهای بولتزمان را **تابع پارش**[۴۳] مینامیم و از قرار زیر است:

$$Z = \int dEe^{-\beta E}\,, \tag{۱۴۸.۱}$$

---

[۳۷] ensemble
[۳۸] microcanonical ensemble
[۳۹] canonical ensemble
[۴۰] grand canonical ensemble
[۴۱] normalization constant
[۴۲] normalization condition
[۴۳] partition function

که $\beta = \frac{1}{k_B T}$ و انتگرال روی تمام حالتهای ممکن انرژی گرفته میشود. عملا با دانستن تابع پارش میتوان تمام ویژگی های ترمودینامیکی سامانه را بدست آورد و بنابراین مهمترین مسیله محاسباتی در مکانیک آماری بدست آوردن تابع پارش سامانه است.

انرژی داخلی U هم برابر است با

$$U = \frac{\int dE E e^{-\beta E}}{\int dE e^{-\beta E}} = \frac{\int dE E e^{-\beta E}}{Z} \,. \tag{۱۴۹.۱}$$

میتوان عبارت بالا بر حسب تابع پارش بصورت زیر نوشت:

$$U = -\frac{d \ln Z}{d\beta} \,. \tag{۱۵۰.۱}$$

همچنین با تعریف انرژی آزاد هلمهولتز F به صورت

$$F = U - TS \,, \tag{۱۵۱.۱}$$

خواهیم داشت:

$$F = -k_B T \ln Z \,, \tag{۱۵۲.۱}$$

که از آن روابط ترمودینامیکی زیر بدست می آید:

$$S = -\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_V \,, \tag{۱۵۳.۱}$$

$$P = -\Big(\frac{\partial F}{\partial V}\Big)_T \,. \tag{۱۵۴.۱}$$

در اینجا یک قضیه مهم در مکانیک آماری را بیان و اثبات میکنیم. این قضیه بعدا در مطالعه تابش جسم سیاه به کار ما می آید.

قضیه ۱.۱ (قضیه همپاری). هر مد نوسانی در هامیلتونی کلاسیکی[۴۴] سهمی برابر $k_B T$ در میانگین انرژی سامانه دارد.

اثبات فرض کنید شکل کلی هامیلتونی سامانه بصورت زیر است:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \Big(A_i q_i^2 + B_i p_i^2 \Big) \,, \tag{۱۵۵.۱}$$

که n درجات آزادی سامانه و A_i و B_i ضرایبی ثابتند. هر کدام از جملات $A_i q_i^2 + B_i p_i^2$ مولد یک مد نوسانی از این سامانه هستند. بنابراین با توجه به (۱۴۷.۱) میانگین انرژی هر مد برابر است با

$$\big\langle A_i q_i^2 + B_i p_i^2 \big\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dq_i \int_{-\infty}^{\infty} dp_i (A_i q_i^2 + B_i p_i^2) e^{-\frac{A_i q_i^2 + B_i p_i^2}{k_B T}}}{\int_{-\infty}^{\infty} dq_i \int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\frac{A_i q_i^2 + B_i p_i^2}{k_B T}}} = k_B T \,, \tag{۱۵۶.۱}$$

که همان حکم قضیه همپاری است. □

نکته ی بسیار مهم در این قضیه این است که انرژی تمام مدها مستقل از مقدار ضرایب A_i و B_i بوده و با هم برابرند. پس برای بدست آوردن میانگین انرژی یک سامانه متشکل از مجموعه ای از نوسانگرها، کافیست تعداد مدهای نوسانی آن را شمرده و در انرژی یک مد (که برابر است با $k_B T$) ضرب کنیم.

تمرین ۶.۱ (قانون دولون-پتی). برای یک جامد بلوری ثابت کنید گرمای ویژه مولی (یعنی گرمای ویژه در واحد مول) مقداری ثابت و برابر $c_V = C_V/n = R = 3N_A k_B$ است.

مسائل

مسئله ۱.۱ (تابش جسم سیاه). .....

[۴۴] در اینجا کلاسیکی به معنای ناکوانتومی است.