

مکانیک کوانتومی

مفاهیم، مبانی و کاربردها

علیرضا علمائی
استادیار فیزیک دانشگاه جهرم

فهرست مطالب

۵	سرچشمه‌های مکانیک کوانتومی	۲
۵	تابش جسم سیاه	۱.۲
۶	قانون وین و قانون ریلی-جینز	۱.۱.۲
۸	قانون پلانک و تولد کوانتوم	۲.۱.۲
۹	اثر فوتوالکتریک و کوانتش نور	۲.۲
۹	مقاله ی اینشتین	۱.۲.۲
۱۱	آزمایش میلیکان	۲.۲.۲
۱۲	گرمای ویژه جامدات	۳.۲
۱۴	اثر کامپتون و خاصیت ذره‌ای نور	۴.۲
۱۵	پراکندگی ریلی	۱.۴.۲
۱۵	پراکندگی کامپتون	۲.۴.۲
۱۷	مدل اتمی بوهر	۵.۲
۲۰	طیف اتم هیدروژن	۱.۵.۲
۲۴	مدل اتمی راترفورد	۲.۵.۲
۲۶	اصول موضوعه ی بوهر	۳.۵.۲
۲۹	آزمایش فرانک-هرتز	۶.۲
۳۰	طول موج دوبروی و خاصیت موجی ماده	۷.۲
۳۲	آزمایش داویسون-گرمر	۸.۲
۳۳	معادله‌ی شرودینگر	۹.۲
۳۵	تعبیر احتمالاتی معادله‌ی شرودینگر	۱۰.۲
۳۶	بقای احتمال	۱.۱۰.۲
۳۷	اصل عدم قطعیت هایزنبرگ	۱۱.۲
۳۸	میکروسکوپ هایزنبرگ	۱.۱۱.۲
۳۹	اندازه گیری مکان الکترون	۲.۱۱.۲
۳۹	مکانیک ماتریسی	۱۲.۲

فصل ۲

سرچشمه‌های مکانیک کوانتومی

تولد نظریه ی کوانتوم از یک سری مشاهدات آزمایشگاهی شروع شد که با فیزیک کلاسیک قابل توضیح نبوده و حتی با نتایجی که فیزیک کلاسیک پیش بینی میکرد در تناقض بود. سالهای ابتدایی نظریه ی کوانتوم دوران کارهایی بر اساس حدسیات هوشمندانه ای بود که بر مبنای مطالعات بر روی ویژگی های تابش و اتمها حاصل شده بود. بعداً و در سالهای ابتدایی دهه ی ۱۹۲۰ میلادی بود که این چالشها به نظریه ای یکپارچه به نام مکانیک کوانتومی ختم شد. این فصل خلاصه ای از این تلاشهاست که سرچشمه های تجربی و نظری آن چیزی است که امروز به عنوان مکانیک کوانتومی میشناسیم. از مطالعه ی تابش جسم سیاه که شروع ایده ی کوانتوم بود تا آزمایشها و ایده هایی که ویژگی های غیر کلاسیکی (و به عبارتی کوانتومی) ذره ای نور و موجی ماده را نشان داد تا ظهور مفهوم احتمال در پیشبینی های فیزیکی و کمرنگ شدن تعیین گرایی کلاسیکی، تا نهایتاً تولد مکانیک کوانتومی، بصورت روندی تاریخی ارائه شده است.

۱.۲ تابش جسم سیاه

هر جسمی که تحت تابش الکترومغناطیسی قرار بگیرد، قسمتی از آن را جذب و مابقی را باز می تاباند. بخاطر جذب تابش، انرژی و نتیجتاً دمای جسم افزایش میابد. بنابراین جسم مورد نظر برای رسیدن به تعادل با محیط اطرافش باید بوسیله ی گسیل تابش، انرژی را به محیط اطراف بدهد. مطالعه ی تابش گسیلی توسط یک جسم گرم شده که در تعادل ترمودینامیکی است در ابتدا بوسیله فیزیکدان آلمانی گوستاو کرکهوف^۱ در سال ۱۸۵۹ میلادی آغاز شد. او فرض کرد جسم مورد نظر تمامی تابش فرودی را جذب میکند و آن را **جسم سیاه**^۲ نامید. البته جسم سیاه یک مفهوم آرمانی است چرا که هر جسمی به هر حال قسمتی هرچند اندک از تابش فرودی را بازتاباند. میتوان جسم سیاه را با یک کاواک که از طریق یک حفره ی بسیار کوچک به بیرون راه دارد مدل کرد. چراکه مطابق شکل (۱.۲) تابش ورودی به حفره بخاطر برخوردهای متوالی با سطح داخلی ناهموار کاواک در آنجا حبس شده و احتمال برون رفت آن از کاواک بسیار اندک است. بنابراین جسم عملاً تمام تابش فرودی را جذب کرده و بصورت موثر مانند یک جسم سیاه رفتار میکند.

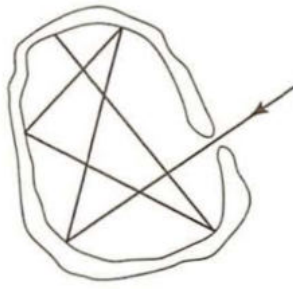
فرض کنیم کاواک تا دمای T گرم شده است. دیواره های داخلی کاواک تابش گرمایی دارند و بنابراین فضای داخلی آن مملو از تابش الکترومغناطیسی است. چگالی انرژی تابشی درون کاواک در بازه ی بسامدی ν و $\nu + d\nu$ برابر $u(\nu, T)d\nu$ است که $u(\nu, T)$ را چگالی طیفی انرژی مینامیم و واحد آن $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$ میباشد. با استدلالهای هندسی میتوان نشان داد که رابطه ی بین چگالی طیفی انرژی و شار توان^۳، $\varepsilon(\nu, T)$ ، جذب شده توسط دیواره های محفظه از قرار زیر است:

$$\varepsilon(\nu, T) = a \frac{c}{4} u(\nu, T), \quad (1.2)$$

که $0 \leq a \leq 1$ ضریب جذب تابش توسط دیواره های محفظه و برای جسم سیاه $a = 1$ است.

کرکهوف با یک استدلال ترمودینامیکی نشان داد که برای جسم سیاه، چگالی طیفی انرژی تابشی درون کاواک از جنس و شکل جسم مستقل و فقط به بسامد و دما بستگی دارد و به عبارتی $u(\nu, T)$ یک تابع جهانی است. چراکه اگر با هر تغییری در

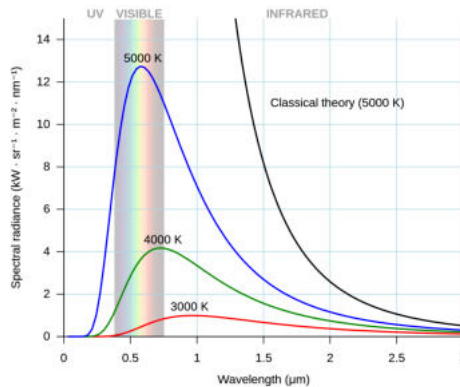
^۱Gustav Kirchhoff
^۲black body
^۳انرژی در واحد زمان بر واحد سطح



شکل ۱.۲: کاواکی که با یک حفره ی کوچک به بیرون راه دارد. تابش ورودی به حفره تماما توسط جسم جذب شده و به بیرون بازتاب نمیشود.

شکل یا جنس محفظه، $u(\nu, T)$ هم تغییر کند بدین معنا خواهد بود که انرژی در برخی بسامدها باید از تابش به دیواره های محفظه یا بالعکس شارش یابد که با فرض اولیه ی همدمای بودن آن در تناقض است.

در دهه های آخر قرن نوزدهم فیزیکدانان بر روی مطالعه ی طیف $u(\nu, T)$ متمرکز بودند و بویژه در موسسه فن و فیزیک قلمرو پادشاهی آلمان^۴ آن را اندازه گیری کردند. و البته بعدها اندازه گیری های دقیقی از طیف در دماهای مختلف انجام شده. به عنوان نمونه شکل (۲.۲) را ببینید.



شکل ۲.۲: یک نمودار نوعی از چگالی انرژی در واحد طول موج بر حسب طول موج برای دماهای مختلف. واضح است که بیشینه ی طیف تابشی با افزایش دما به سمت طول موجهای کمتر انتقال میابد. در دماهای بین ۵۰۰۰ تا ۷۰۰۰ کلوین این بیشینه در طیف مرئی قرار دارد. طیف تابشی خورشید در دمای ۵۸۰۰ کلوین با تقریب خوبی تابش جسم سیاه است.

۱.۱.۲ قانون وین و قانون ریلی-جینز

حال مسئله ی اصلی فهم طیف اندازه گیری شده بود. ویلهلم وین^۵ در سال ۱۸۹۳ با برخی مفروضات خاص درباره انتشار و جذب تابش نشان داد که رابطه زیر که به **قانون وین** معروف است برای طیف تابشی جسم سیاه برقرار است:

$$u(\nu, T) = C_1 \nu^3 e^{C_2 \nu / T} . \quad (2.2)$$

با برازش این رابطه بر داده های آزمایشگاهی، ثابتهای C_1 و C_2 بدست می آیند و قانون وین بجز در بسامدهای پایین (و بویژه در بسامدهای پایین و دماهای بالا)، بر نمودار تجربی منطبق است.

همچنین تلاشهایی توسط لرد ریلی^۶ و جیمز جینز^۷ برای توضیح این مسئله صورت گرفت. از الکترومغناطیس معلوم بود که میتوان میدان تابش درون یک محفظه را بر اساس جمع سری فوریه روی مدهای متعامد نوشت که هر مد دارای دو قطبش

Physikalisch-Technische Reichsanstalt^f

Wilhelm Wien^۵

Lord Rayleigh^۶

James Jeans^۷

راستگرد و چپگرد است. از طرفی بر اساس قضیه (۴.۲) که قانون همپاری کلاسیکی را بیان میکند، انرژی میانگین هر مد نوسانی برابر $k_B T$ است و بنابراین چگالی طیفی انرژی $u(\nu, T)$ برابر با چگالی حجمی تعداد مدهای نوسانی در واحد بسامد، $N(\nu)$ ، ضرب در انرژی میانگین هر مد نوسانی خواهد بود یعنی:

$$u(\nu, T) = N(\nu) k_B T. \quad (۳.۲)$$

برای محاسبه ی $N(\nu)$ ، از آنجا که چگالی انرژی تابشی در جسم سیاه به جنس و شکل کلاواک بستگی ندارد، آن را بصورت محفظه ای از جنس رسانای کامل و به شکل مکعبی با اضلاع L در نظر میگیریم. بنابراین هر شرط مرزی که روی یک وجه مکعب ارضا شود باید روی وجه مقابل هم ارضا گردد. پس فاز میدان تابشی در فاصله ی L باید با مضربی از 2π تغییر کند که بدین معنی است که برای عامل نمایی $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ در جملات بسط میدان، رابطه ی زیر برقرار است:

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L}, \quad i = x, y, z, \quad (۴.۲)$$

که در آن n_i اعداد صحیح هستند. میتوان رابطه ی بالا را به شکل برداری زیر نوشت:

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{L}, \quad (۵.۲)$$

که در آن $\mathbf{n} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}}$. هر مد متعامد با سه تایی (n_x, n_y, n_z) و قطبش آن مشخص میشود. بنابراین با توجه به (۵.۲) طول موج مد متعامد برابر است با

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{L}{|\mathbf{n}|}, \quad (۶.۲)$$

و بسامد آن از رابطه ی

$$\nu = \frac{|\mathbf{n}|c}{L}, \quad (۷.۲)$$

بدست می آید. برای شمارش تعداد مدهای نوسانی در بازه ی بسامدی بین ν و $\nu + d\nu$ ، باید تعداد سه تایی های (n_x, n_y, n_z) در این بازه را شمارش کنیم. از رابطه ی (۷.۲) داریم:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{\nu L}{c}\right)^2 = R^2. \quad (۸.۲)$$

بنابراین تعداد مدهای نوسانی بین ν و $\nu + d\nu$ برابر با حجم پوسته ی کروی به شعاع R و ضخامت dR است. پس چگالی حجمی تعداد مدهای نوسانی در واحد بسامد، $N(\nu)$ ، برابر است با

$$N(\nu) = 2 \left(\frac{4\pi\nu^2}{c^3} \right) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}. \quad (۹.۲)$$

ضریب ۲ پشت پرانتز بخاطر دو قطبش ممکن برای هر طول موج است.

بنابراین نهایتاً با توجه به (۳.۲) و (۹.۲) رابطه زیر که به **قانون ریلی-جینز** معروف است برای چگالی طیفی انرژی تابشی جسم سیاه بدست می آید:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T. \quad (۱۰.۲)$$

این رابطه را اول بار لرد ریلی در ژوئن ۱۹۰۰ بدست آورد و بعداً در سال ۱۹۰۵ جیمز جینز آن را اصلاح و تکمیل کرد. قانون ریلی-جینز طیف تابشی جسم سیاه در بسامدهای پایین را بخوبی توضیح میداد اما در بسامدهای بالا از آن بشدت منحرف شده و به بینهایت میگراید که به آن فاجعه فرابنفش^۸ گویند. بعلاوه چگالی انرژی کل، که مساحت زیر نمودار طیف تابشی جسم سیاه بر حسب بسامد است، بوضوح کمیتی متناهی است که قانون ریلی-جینز آن را بینهایت پیشبینی میکند. ریلی معتقد بود که این ناهمخوانی بخاطر عدم اعتبار قانون همپاری کلاسیکی در بسامدهای بالاست.

^۸ Ultraviolet catastrophe

۲.۱.۲ قانون پلانک و تولد کوانتوم

در طول سال ۱۹۰۰ جلسات انجمن فیزیک آلمان تبدیل به محل اصلی بحث و تبادل نظر درباره‌ی موضوعات مرتبط با تابش جسم سیاه شده بود چراکه بیشتر متخصصین این حوزه مانند روبنز^۹، کرلباوم^{۱۰}، پلانک^{۱۱} و ... از اعضای اصلی این انجمن بودند. هیچکدام از قوانین وین و ریلی-جینز نمیتوانستند در همه بسامدها طیف تابشی جسم سیاه را توصیف کنند. بویژه داده‌های آزمایشگاهی که در پاییز ۱۹۰۰ توسط روبنز و کرلباوم منتشر شد بوضوح نشان داد که قانون وین در بسامدهای پایین با آزمایش انطباق ندارد. این مسئله پلانک را بر آن داشت که با دستکاری قانون وین و کمک از قانون ریلی-جینز^{۱۲} بتواند به رابطه‌ای دست یابد که در تمامی بسامدها توصیف کننده‌ی طیف تابشی جسم سیاه باشد. او نهایتاً در اکتبر ۱۹۰۰ به رابطه‌ی تجربی زیر دست یافت^{۱۳} که در تمامی بسامدها بر داده‌های آزمایشگاهی منطبق بود:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (11.2)$$

که دارای یک ثابت h است که با برازش بر داده‌های تجربی مقدار آن بدست می‌آید. این ثابت را امروزه ثابت پلانک گویند که ثابتی جهانی است و مقدار دقیق آن برابر است با

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}. \quad (12.2)$$

پس از اینکه معلوم شد این قانون تجربی در تمامی بسامدها با داده‌های تجربی همخوانی دقیقی دارد، کار بعدی پلانک استنتاج آن از مبانی نظری بود که اثبات آن را کمی بعد در ۱۴ دسامبر ۱۹۰۰ در جلسه‌ی انجمن فیزیک آلمان ارائه داد^{۱۴} و در آن ایده‌ی کوانتوم انرژی را مطرح کرد. تاریخی که آرنولد سامرفلد^{۱۵} آن را تولد نظریه‌ی کوانتوم مینامد. ما در اینجا و به دلایل آموزشی، مسیر اثبات پلانک را دنبال نمیکنیم و اثباتی را لورنتس^{۱۶} در سال ۱۹۰۷ ارائه داد بیان میکنیم که کمی متفاوت و البته برای هدف ما مناسبتر است.

پلانک برای اثبات رابطه‌اش همچنان فرض کرد میدان تابشی درون کاواک موجی پیوسته است که از معادلات ماکسول پیروی میکند. اما فرض کرد اتمهای دیواره‌ی کاواک مانند نوسانگرهایی رفتار میکنند که با تابش درون کاواک در تبادل انرژی هستند. حال اگر بخواهیم چگالی طیفی انرژی تابشی درون کاواک در بسامد ν را بدست آوریم باید تعداد مدهای نوسانی در واحد حجم در واحد بسامد، $N(\nu)$ ، را در انرژی میانگین هر مد نوسانی، $\langle E \rangle$ ، ضرب کنیم، به عبارتی:

$$u(\nu, T) = N(\nu) \langle E \rangle. \quad (13.2)$$

اگر برای بدست آوردن $\langle E \rangle$ از قانون همپاری کلاسیکی (؟؟) استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty dE E e^{-\beta E}}{\int_0^\infty dE e^{-\beta E}} = \frac{1}{\beta} = k_B T, \quad (14.2)$$

که همان قانون توزیع انرژی ریلی-جینز است. در اینجا، و برای اثبات رابطه (۱۱.۲) پلانک یک فرض اساسی کرد. او فرض کرد که انرژی نوسانگرها، E ، بجای اینکه بصورت پیوسته تغییر کند **مضربی صحیح از یک عنصر انرژی پایه** ε باشد که بعداً به **کوانتوم انرژی** معروف شد. اگرچه او این ایده را به درستی مهمترین نکته‌ی محاسباتش نامید، اما تا مدت‌ها آن را به عنوان یک واقعیت بنیادی فیزیک قبول نداشت. او از این ایده به عنوان **یک عمل از روی استیصال**^{۱۷} یاد کرده و بیشتر به دید یک طرفند محاسباتی برای اثبات رابطه‌اش به آن نگاه میکرد. بنابراین رابطه‌ی (۱۴.۲) بصورت زیر بازنویسی میشود:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}, \quad (15.2)$$

^۹Rubens

^{۱۰}Kurlbaum

^{۱۱}Planck

^{۱۲}البته در آن زمان هنوز جینز اصلاحات خود را بر روی قانون ریلی انجام نداده بود.

^{۱۳}رک Jagdish Mehra, Golden Age of Physics pp (37-39)

^{۱۴}Planck, Max, *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum* ("On the Theory of the Law of Energy Distribution in the Normal Spectrum"), Verh. D. Phys. Ges. **2**, 237 (1900).

^{۱۵}Arnold Sommerfeld

^{۱۶}Lorentz

^{۱۷}an act of desperation

که در آن $E_n = n\varepsilon$ و خواهیم داشت:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-\beta n\varepsilon}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\varepsilon})^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\varepsilon})^n} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \right) (1 - e^{-\beta\varepsilon})$$

$$= \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} . \quad (۱۶.۲)$$

پس با توجه به روابط (۱۳.۲) و (۹.۲) به رابطه ی زیر میرسیم:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1} , \quad (۱۷.۲)$$

که با فرض

$$\varepsilon = h\nu , \quad (۱۸.۲)$$

رابطه ی (۱۱.۲) بدست می آید. مقداری که پلانک برای h بدست آورد برابر 6.55×10^{-34} J.s بود که بسیار به مقدار دقیق آن نزدیک است. رابطه ی (۱۸.۲) از آن رو اهمیت دارد که اولاً انرژی گسیلی اتمهای دیواره کاواک را که پیش از این مقداری پیوسته فرض میشد مضربی از یک مقدار پایه که به آن کوانتوم انرژی میگوئیم در نظر میگیرد. ثانیاً این کوانتوم انرژی فقط به بسامد تابش گسیلی بستگی دارد. علت اینکه این دانه بندی بودن یا به عبارتی کوانتیده بودن انرژی گسیلی تا پیش از این محسوس نبود کوچکی بسیار زیاد ثابت پلانک است. به قسمی که ضرایب متوالی از کوانتای انرژی مقادیری بسیار نزدیک به هم داشته و بصورت موثر طیفی پیوسته را تشکیل میدهند.

تمرین ۱.۲. یک لامپ ۱۰۰ وات با نور زرد ($\lambda = 570$ nm) چند کوانتوم انرژی در هر ثانیه گسیل میکند؟ □

تمرین ۲.۲. ثابت کنید قانون پلانک در حد بسامدهای بالا و پایین به ترتیب به قوانین وین و ریلی-جینز تبدیل میشود. □

۲.۲ اثر فوتوالکتریک و کوانتش نور

در اثبات رابطه توزیع انرژی جسم سیاه، پلانک فرض کرده بود که انرژی گسیلی توسط اتمهای دیواره ی کاواک کوانتیده است ولی انرژی میدان تابشی درون کاواک را پیوسته در نظر گرفته بود و فرض کوانتیده بودن تابش برای آن الزامی نبود. به عبارتی از دید پلانک فرض کوانتش انرژی بیش از یک واقعیت فیزیکی ترفندی هوشمندانه برای بدست آوردن رابطه ی طیف انرژی تابشی جسم سیاه بود. حتی بعد از آن پلانک تلاش کرد که بدون فرض کوانتش انرژی این رابطه را بدست آورد اما موفق نشد.

۱.۲.۲ مقاله ی اینشتین

تعبیر مدرن از قانون توزیع پلانک (۱۱.۲) از گمانه زنی اکتشافی آلبرت اینشتین^{۱۸} در یکی از مقاله های معروفش در سال ۱۹۰۵ (یعنی همان سالی که مقاله نسبیت خاص را هم ارائه داد) بدست آمد^{۱۹}. او برای بدست آوردن توزیع انرژی جسم سیاه بجای اتمهای دیواره کاواک فرض کوانتیده بود انرژی را برای تابش درون کاواک اعمال کرد.

مشابه آنچه در بخش قبل برای بدست آوردن قانون پلانک انجام دادیم، میتوان انرژی میانگین هر مد تابش را در بسامد معین و به کمک رابطه ی (؟؟) و (؟؟) محاسبه کرد. اگر انرژی میدان تابشی را کمیتی پیوسته در نظر بگیریم مجدداً به قانون همپاری کلاسیکی و بنابراین به قانون ریلی-جینز میرسیم. کار مهم اینشتین این بود که در این مرحله فرض کرد انرژی تابش الکترومغناطیسی درون کاواک $E = nh\nu$ و کمیتی کوانتیده است. بدین صورت تابع توزیع پلانک (۱۱.۲) ولی با فرضی کاملاً متفاوت بدست می آید.

اهمیت بنیادین فرض اینشتین این بود که برای بدست آوردن قانون پلانک، تابش را که تا پیش از این پدیده ای موجی در نظر گرفته میشد، بصورت ذراتی که بعداً فوتون^{۲۰} نامیده شد در نظر گرفت که هر کدام حامل انرژی $h\nu$ هستند. در اینباره اینشتین در مقاله اش مینویسد:

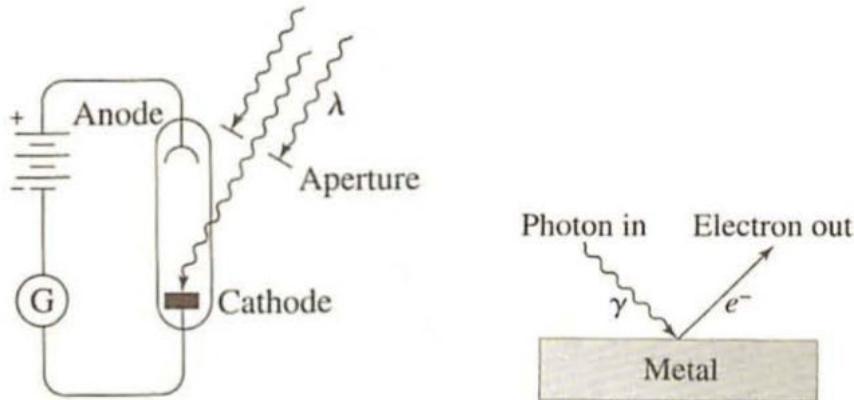
Albert Einstein^{۱۸}

On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light (1905)^{۱۹}

photon^{۲۰}

نظریه ی موجی نور، که از طریق توابع پیوسته فضایی عمل میکند، در بیان پدیده های صرفا ایتیکی بسیار کاراست و احتمالا هرگز با نظریه ی دیگری جایگزین نخواهد شد. علی رغم تایید آزمایشگاهی کامل این نظریه وقتی برای پدیده هایی نظیر بازتاب، شکست، پاشندگی و ... بکار میرود، همچنان قابل انتظار است که نظریه ی تابشی، که بوسیله ی توابع پیوسته ی فضایی عمل میکند، هنگامی که برای پدیده های گسیل و جذب نور بکار گرفته میشود به تناقض هایی بیانجامد. به نظر من مشاهدات مرتبط با تابش جسم سیاه، فلوئورسان، تولید امواج کاندی بوسیله پرتوی فرابنفش و دیگر پدیده های مرتبط با گسیل و جذب تابش زمانی بخوبی فهمیده خواهند شد که انرژی نور در فضا بصورت گسسته ای توزیع شده باشد. با توجه به این فرض، انرژی پرتو نور گسیل شده از یک منبع نقطه ای بصورت پیوسته در فضا توزیع نمیشود بلکه متشکل از تعداد متناهی از کوانتاهای انرژی است که در نقاط فضا جایگزیده شده اند، بدون تقسیم شدن حرکت میکنند، و فقط بصورت واحدهای کامل تولید یا جذب میشوند.

همانگونه در این نقل قول دیدیم یکی از پدیده هایی که اینشتین به عنوان نشانه ای از تایید کوانتش تابش به آن دست میازد تولید پرتوهای کاندی بوسیله نور فرابنفش است که امروزه به آن اثر فوتوالکتریک میگوییم. در اواخر قرن نوزدهم مشاهده شده بود که وقتی سطح فلز با نور فرابنفش مورد تابش قرار بگیرد از آن بار الکتریکی جدا میشود. کشف الکترون این فرضیه را مطرح کرد که اثر فوتوالکتریک به علت آزاد شدن الکترونها است. این فرضیه در سال ۱۹۰۰ بوسیله ی فیلیپ لنارد^{۲۱} تایید شد. حتی دیده شد که فلزهای قلیایی نظیر سدیم، پتاسیم و روبیدیوم به تابش نور مرئی هم حساس هستند. شکل (۳.۲) را ببینید. البته یونهای مثبت فلزات جلوی جدا شدن الکترون ها را میگیرند و بنابراین برای کنده شدن آنها باید مقداری انرژی صرف کرد که به آن تابع کار فلز^{۲۲}، W ، گویند.



(ب) شمای کلی ابزار مورد استفاده برای مطالعه اثر فوتوالکتریک

(آ) شمای کلی اثر فوتوالکتریک

شکل ۳.۲: اثر فوتوالکتریک

با تصویری که ما از ویژگی موجی تابش بر اساس معادلات ماکسول داریم ممکن است تصور شود که نور با شدت بیشتر، انرژی بیشتری به الکترون میدهد. چراکه شدت نور، I ، با انرژی آن متناسب است. بنابراین انتظار این است که انرژی جنبشی الکترونها آزاد شده (فوتوالکترونها) وقتی تحت تابش نور با شدت بیشتر قرار میگیرند بیشتر از زمانی باشد که شدت تابش ضعیف است. همچنین مدت زمان لازم برای اینکه الکترونها انرژی نور تابشی را جذب کرده و از اتم جدا شوند از مرتبه ی 10^{-8} ثانیه پیش بینی میشود. اما آزمایشهایی که توسط لنارد در سال ۱۹۰۲ انجام شد نشان داد که اینگونه نیست. شکل (۳.۲) (ب) شمای کلی ابزاری که برای مطالعه ی اثر فوتوالکتریک استفاده شد را نشان میدهد. در این مدار کاتد که فلز مورد تابش است و آند را در یک محفظه ی خلاء قرار میدهند. فوتوالکترونها آزاد شده از کاتد به آند رسیده و جریانی را در گالوانومتر ایجاد میکنند. آنچه از مشاهدات تجربی بدست آمد بیانگر این است که:

۱. انرژی جنبشی فوتوالکترونها مستقل از شدت تابش فرودی است.

۲. اگر بسامد تابش فرودی از یک حد آستانه ی ν_{\min} کمتر باشد هیچ فوتوالکترونی آزاد نمیشود، حتی اگر شدت نور فرودی را افزایش دهیم.

^{۲۱} Philipp Lenard

^{۲۲} work function

۳. انرژی جنبشی فوتوالکترونها به بسامد تابش فرودی بستگی دارد و بصورت خطی با آن افزایش میابد.

۴. با افزایش شدت نور فرودی تعداد فوتوالکترونها (و نه انرژی آنها) افزایش میابد.

۵. مدت زمان لازم برای جدا شدن فوتوالکترونها از سطح فلز از مرتبه 10^{-9} ثانیه است.

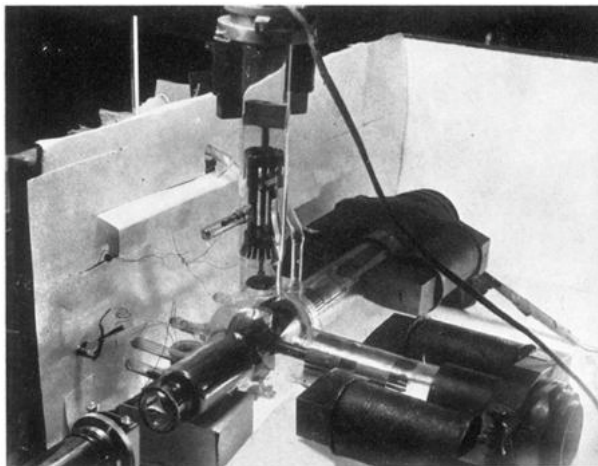
اینستین در مقاله اش مدعی شد که فرضیه ذره ای بودن تابش مشاهدات فوق را که با خاصیت موجی تابش در تعارض است توجیه میکند. بر این اساس با فرض اینکه هر کوانتای انرژی یا همان فوتون، انرژی برابر $h\nu$ داشته باشد رابطه ی زیر بین انرژی فوتون تابشی و فوتوالکترون گسیلی برقرار است:

$$h\nu = W + K_e, \quad (19.2)$$

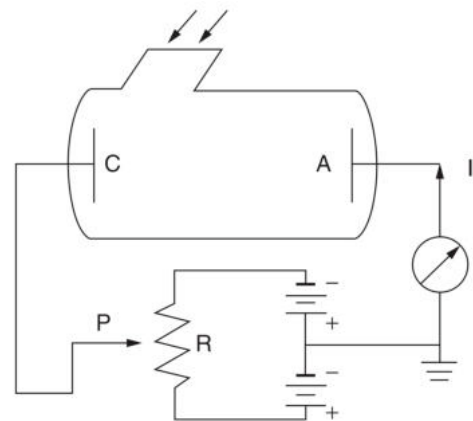
که W تابع کار فلز و K_e انرژی جنبشی فوتوالکترون گسیلی است. ذره ی فوتون به سطح فلز برخورد میکند و انرژی $h\nu$ را به الکترون میدهد. سهم W از این انرژی صرف جدا شدن الکترون از فلز و مابقی انرژی جنبشی آن است. به همین علت نورهای فرودی با بسامد کمتر از $\nu_{\min} = W/h$ ، هرچقدر هم شدتشان زیاد باشد، الکترونی را از سطح فلز جدا نمیکنند.

۲.۲.۲ آزمایش میلیکان

در سال ۱۹۱۶ رابرت میلیکان^{۳۳} در شیکاگو رابطه ی (۱۹.۲) را برای اثر فوتوالکتریک بصورت آزمایشگاهی تایید کرد^{۳۴}. شکل (۲.۲(ا)) شمای مدار استفاده شده در آزمایش میلیکان را نشان میدهد. نور به کاتد C برخورد میکند و الکترونها جدا شده پس از رسیدن به آند A در مدار جریان یافته که با گالوانومتر قابل اندازه گیری است. انرژی فوتوالکترونها توسط پتانسیل بازدارنده ای که بوسیله ی رئوستای P تنظیم میشود قابل اندازه گیری است. شکل (۲.۲(ب)) برپایش آزمایش میلیکان را با جزییات ساختار داخلی ابزارها بکار رفته در آن نشان میدهد.



(ب) برپایش آزمایش میلیکان



(ا) مدار آزمایش میلیکان.

شکل ۲.۴: آزمایش میلیکان

با افزایش پتانسیل بازدارنده ی V ، انرژی فوتوالکترونهایی که به آند میرسند کاهش میابد تا زمانی که در پتانسیل توقف V_s هیچ فوتوالکترونی به آند نرسیده و جریان گالوانومتر صفر شود. در این حالت داریم:

$$eV_s = K_e = \frac{1}{2}m_e v^2, \quad (20.2)$$

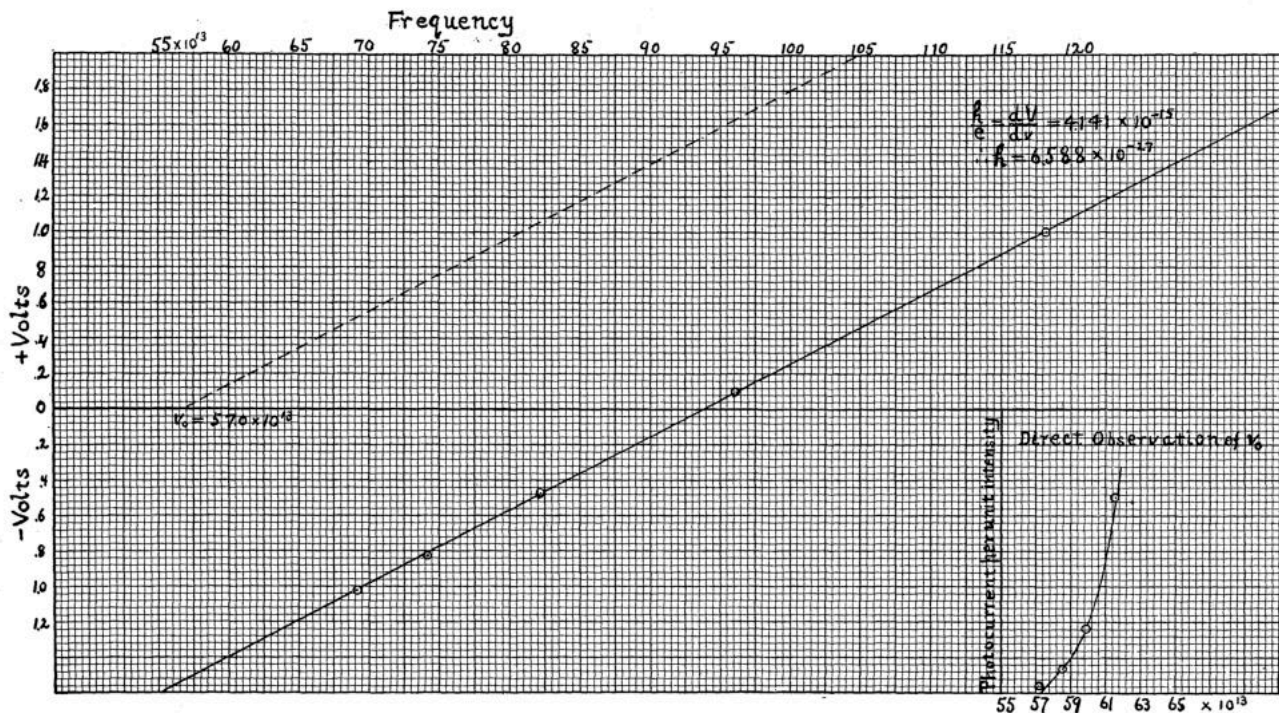
که e و m_e به ترتیب بار و جرم الکترون و v سرعت آن در لحظه ی جدا شدن از کاتد است. در مقیاس های اتمی و زیر اتمی ژول واحد بسیار بزرگی است و معمولاً از واحد الکترون-ولت استفاده میشود که برابر است با:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (21.2)$$

^{۳۳} Robert Millikan

^{۳۴} R. A. Millikan, *A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h"*, Phys. Rev. 7, 355 (1916)

پس با اندازه گیری V_s (که عملاً همان انرژی بر حست الکترون-ولت است) و جریان i به ازای بسامدهای مختلف پرتو فرودی، i ، میتوان به ترتیب تغییرات انرژی جنبشی فوتوالکترونها و جریان برقرار شده در مدار را بر حسب بسامد نور فرودی بدست آورد. نتایجی که میلیکان بدست آورد کاملاً تایید کننده ی فرضیه کوانتش نور اینشتین و خاصیت ذره ای تابش بود و تمامی تعارضات مشاهده شده با نظریه ی موجی تابش را بخوبی رفع میکرد. شکل (۵.۲) نتایج بدست آمده توسط میلیکان برای فلز لیتیموم را نشان میدهد. واضح است که با افزایش بسامد نور فرودی، پتانسیل توقف V_s هم بصورت خطی با آن افزایش میابد. شیب این نمودار برابر با h/e خواهد بود که از روی آن ثابت پلانک 6.588×10^{-34} J.s بدست می آید که بسیار به مقداری که پلانک در مطالعات تابش جسم سیاه بدست آورده بود، 6.55×10^{-34} J.s، نزدیک است.



شکل ۵.۲: نمودار حاصل از نتایج آزمایشهای میلیکان برای فلز لیتیموم. این نمودار افزایش خطی انرژی فوتوالکترون گسیلی را بر حسب بسامد نور فرودی نشان میدهد. از روی شیب این نمودار مقدار 6.588×10^{-34} J.s برای ثابت پلانک بدست می آید که به مقداری که توسط پلانک محاسبه شده بود بسیار نزدیک است. همچنین بسامد آستانه ی $\nu_{\min} = 5.7 \times 10^{14}$ Hz که بیانگر مقدار تابع کار 2.35 eV برای فلز لیتیموم است با مقدار دقیق آن، 2.39 eV، در توافق بسیار خوبی است. به محاسباتی که میلیکان در بالای سمت راست نمودار نوشته است دقت کنید! لازم به ذکر است که واحد انرژی بکار رفته در این نمودار ارگ است که $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$.

تائیری که اثر فوتوالکتریک بر پذیرش نظریه کوانتش انرژی و بویژه خاصیت ذره ای تابش داشت به حدی اهمیت داشت که هم اینشتین و هم میلیکان به ترتیب در سالهای ۱۹۲۱ و ۱۹۲۳ جایزه نوبل را دریافت کردند؛ اینشتین «بخاطر خدماتش به فیزیک نظری و بویژه بخاطر کشف قانون حاکم بر اثر فوتوالکتریک» و میلیکان «بخاطر کارش بر روی بار بنیادی الکتریسیته و اثر فوتوالکتریک». پلانک هم در سال ۱۹۱۸ بخاطر معرفی کوانتای انرژی جایزه ی نوبل را دریافت کرد. البته پلانک در سال ۱۹۰۸ به این نتیجه رسید انرژی نوسانگرهای او باید کوانتیده باشند و این پس از آن بود که پیشقراول فیزیکدانان همنسلش، هندریک آنتون لورنتس،^{۲۵} هم به نتیجه ی مشابه اینشتین، البته از مسیری متفاوت، رسید.

۳.۲ گرمای ویژه جامدات

نقش اینشتین در اعتبار بخشی به نظریه کوانتوم فقط محدود به ایده ی فوتون و اثر فوتوالکتریک نبود. او دو سال پس از مقاله ی اثر فوتوالکتریک، در سال ۱۹۰۷ مقاله ای منتشر کرد که کمتر بدان پرداخته شده اما در توسعه نظریه کوانتومی اهمیت زیادی

^{۲۵}Hendrik Antoon Lorentz



شکل ۳.۲: از چپ به راست آلبرت اینشتین، ماکس پلانک و رابرت میلیکان. انگشتی که در عکس میبینید انگشت والتر نرنست است! او قانون سوم ترمودینامیک را بیان کرد.

داشت. در این مقاله اینشتین ایده ی کوانتوم انرژی را به پدیده هایی که شامل ساختار جامدات هم میشد گسترش داد.^{۲۶}

قانون دولون-پتی که نتیجه ای از قانون همپاری کلاسیک است میگوید که ظرفیت گرمایی مولی جامدات مقداری ثابت و برابر $3R = 24.94 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ است. شکل (۷.۲) گرمای ویژه ی مولی بیشتر عناصر را در دمای اتاق نشان میدهد و برای بسیار از عناصر (مربع های مشکی) این قانون با تقریب خوبی برقرار است. علت این امر آن است که بر اساس قانون همپاری کلاسیکی هر مد نوسانی سهمی برابر $k_B T$ در انرژی میانگین سامانه دارد و برای ساختار بلوری ساده ی سه بعدی در سه جهت میتواند نوسان داشته باشد که سهمی برابر $3k_B T$ خواهد داشت. بنابراین ظرفیت گرمایی ویژه مولی برابر

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial T} \left((nN_A) 3k_B T \right) = 3N_A k_B = 3R \quad (22.2)$$

خواهد بود. البته این قانون برای اتمهای سبکی که در ساختار بلوری شان شدت یکدیگر مقیدند مانند برلیوم فلزی یا کربن به شکل الماس کارایی خود را از دست میدهد.

اما در دماهای بسیار پایین ظرفیت گرمایی مولی جامدات شروع به کاهش کرده و به صفر میل میکند. این رفتار به هیچ وجه با قانون همپاری کلاسیک قابل توجیه نبود. این اینشتین بود که با بکارگیری مجدد ایده ی کوانتش انرژی توانست این رفتار را توضیح دهد. او فرض کرد که انرژی نوسان کریستالهای شبکه ی یونهای جامد از همان قانون کوانتش انرژی نوسانات میدان الکترومغناطیس تبعیت میکند و بدین ترتیب رابطه زیر را بدست آورد:

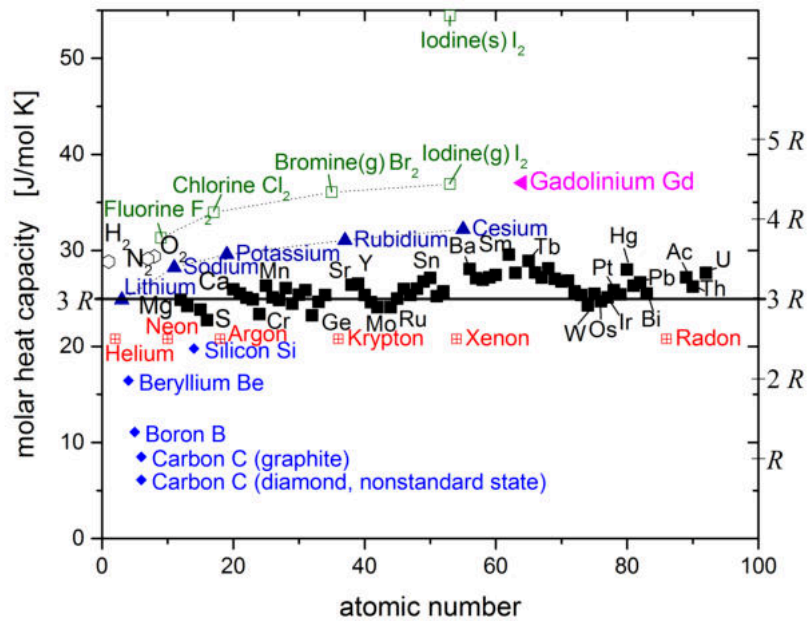
$$c_V = 3N_A k_B \frac{(h\nu/k_B T)^2 e^{h\nu/k_B T}}{[e^{h\nu/k_B T} - 1]^2}, \quad (23.2)$$

که بوضوح در حد $T \rightarrow 0$ به سمت صفر میل میکند. این اولین بار بود که ثابت شد ایده ی کوانتای انرژی علاوه بر تابش الکترومغناطیس برای توصیف دیگر پدیده ها هم قابل استفاده است. البته رفتار c_V در نزدیکی دمای صفر بصورت T^3 است که با کاهش نمایی که مدل اینشتین پیشبینی میکند متفاوت است. چراکه در مدل اینشتین نوسان یونهای شبکه دارای بسامدهای اصلی یکسانی هستند. پیتر دبا^{۲۷} در سال ۱۹۱۲ این مشکل را با فرض اینکه بسامدها به بردار موج بستگی دارند رفع کرد^{۲۸} (شکل (۸.۲)).

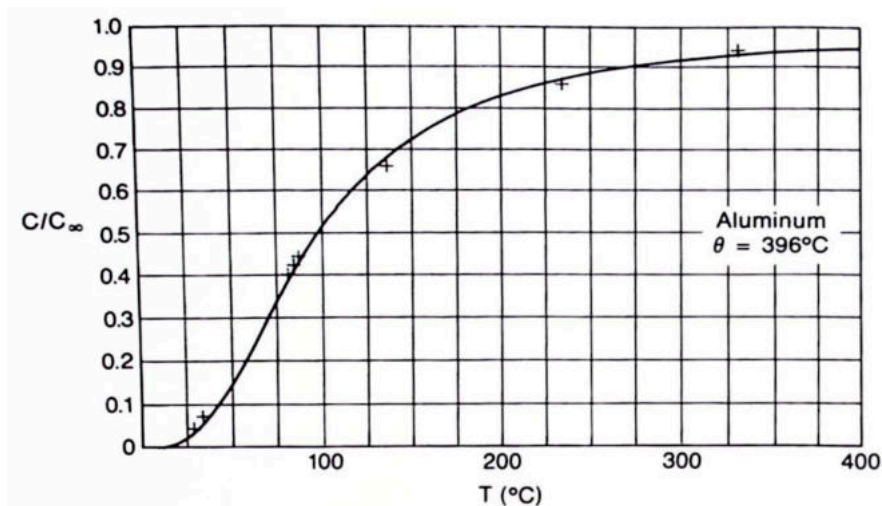
A. Einstein, *Planck's Theory of Radiation and the Theory of Specific Heat*, *Annalen der Physik* **22**, 180-190^{۲۶} (1907).

Peter Debye^{۲۷}

P. Debye, *Zur Theorie der spezifischen Wärme*, *Annalen der Physik* **4**, 789-839 (1912).^{۲۸}



شکل ۷.۲: گرمای ویژه ی مولی برای بیشتر عناصر در دمای ۲۵ درجه سانتی گراد بر حسب عدد اتمی



شکل ۸.۲: تغییرات گرمای ویژه ی مولی آلومینیوم بر حسب دما از مقاله دبای (۱۹۱۲). تطابق داده های آزمایشگاهی با نمودار نظری نشان دهنده ی موفقیت مدل اینشتین-دبای و کارا بودن ایده ی کوانتش انرژی است.

تمرین ۳.۲. رابطه ی (۲۳.۲) اینشتین برای C_V را بدست آورید. □

۴.۲ اثر کامپتون و خاصیت ذره‌ای نور

علی رغم موفقیت ایده ی کوانتش نور و خاصیت ذره ای آن در توصیف طیف تابش جسم سیاه، اثر فوتوالکتریک و ویژه ی جامدات، جامعه ی فیزیک همچنان در مقابل پذیرش این ایده در کنار خاصیت موجی نور مقاومت نشان میداد. حتی خود میلیکان هم تا سال ۱۹۲۳ با پذیرش خاصیت ذره ای تابش مشکل داشت. تنها در این سال آرتور هالی کامپتون^{۲۹} با آزمایش

^{۲۹}Arthur Holly Compton

پراکندگی پرتو ایکس از گرافیت و توضیح آن بوسیله خاصیت ذره‌ای نور، جامعه‌ی فیزیک را قانع کرد که تابش علاوه بر خاصیت موجی (که توضیح دهنده‌ی پدیده‌هایی چون پراش، بازتاب، شکست و ...) است دارای خاصیت ذره‌ای هم می‌باشد.

۱.۴.۲ پراکندگی ریلی

بر اساس نظریه کلاسیکی تابش، موج تابشی فرودی الکترونیهای اتمهای هدف را تحریک کرده و به نوسان در می‌آورد. الکترونیهای نوسان کننده به عنوان نوسانگرهایی کلاسیک از خود تابش الکترومغناطیس با بسامدی برابر با بسامدی که آنها را تحریک کرده است گسیل میدارند. این تابش را تابش پراکندگی ریلی گویند. پراکندگی ریلی ابتدا برای بسامدهای مرئی مطالعه شد. بر اساس معادلات ماکسول بین شدت موج پراکنده شده، I ، با شدت موج فرودی، I_0 ، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$I = \alpha I_0 \nu^4 (1 + \cos^2 \theta) , \quad (24.2)$$

که α ضریب تناسبی است که به جنس محیط پراکنده (ضریب شکست و قطر اتمهای آن) و فاصله بستگی دارد. بسامد نور پراکنده شده برابر با بسامد تابش اولیه و البته قطبیده است. به عنوان یک مثال مهم، رنگ آبی آسمان بوسیله‌ی رابطه‌ی بالا قابل توضیح است. بر این اساس، چون شدت نور پراکنده شده با توان چهارم بسامد رابطه مستقیم دارد، نور با بسامدهای بیشتر (آبی) بیشتر از نور با بسامدهای کمتر (قرمز) پراکنده شده و وارد جو زمین میشود و بنابراین رنگ غلب آسمان در روز آبی است.

تمرین ۴.۲. چرا رنگ آسمان در هنگام غروب بیشتر به قرمز می‌گراید؟ □

در ۱۹۰۹ بارکلا^{۳۰} نشان داد که این نوع پراکندگی برای تابش پرتو ایکس هم رخ میدهد^{۳۱}.

۲.۴.۲ پراکندگی کامپتون

در ۱۹۲۱ کامپتون مشاهده کرد که اگر هدفی را مورد تابش پرتو ایکس قرار دهیم، در طیف نور پراکنده شده، علاوه بر بسامد فرودی، یک مولفه با بسامدی متفاوت هم وجود دارد که با نظریه کلاسیکی تابش که بر اساس معادلات ماکسول و خاصیت موجی تابش است قابل توضیح نیست. او برای توضیح این پدیده از نظریه‌ی کوانتومی تابش استفاده کرد و فرض کرد تابش ایکس فرودی از کوانتاهایی تشکیل شده است که هرکدام به یک الکترون بخصوص در اتمهای هدف برخورد میکنند. بدین ترتیب تحلیل این پدیده تبدیل به یک مسئله‌ی برخورد بین ذره‌ی پرتو ایکس فرودی (یا همان فوتونها) و الکترون اتم هدف میشود. از آنجا که طبق نسبیت خاص فوتون‌های فرودی با سرعت نور حرکت میکنند، ما با یک برخورد دو جسمی ساده‌ی نسبیتی روبرو هستیم.

از نسبیت خاص واضح است که رابطه‌ی $E_\gamma = p_\gamma c$ بین انرژی و تکانه‌ی فوتون برقرار است و از نظریه کوانتوم هر فوتون دارای انرژی $E_\gamma = h\nu$ است و بنابراین تکانه‌ی هر فوتون برابر است با

$$p_\gamma = \frac{h\nu}{c} . \quad (25.2)$$

فوتون فرودی تمام انرژی و تکانه‌ی خود را به الکترون میدهد. الکترون هم پس زده شده و به نوبه‌ی خود فوتونی را با انرژی کمتر (و بنابراین با بسامد کمتر و طول موج بیشتر) در جهتی خاص پراکنده میکند. بنابراین با در نظر گرفتن پایستگی انرژی و تکانه کامپتون رابطه‌ی زیر را بین طول موج فوتون فرودی، λ_0 ، و فوتون پراکنده شده، λ_θ ، بدست آورد^{۳۲}:

$$\Delta\lambda = \lambda_\theta - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) , \quad (26.2)$$

که m جرم الکترون، c سرعت نور، θ زاویه پراکندگی فوتون و $\Delta\lambda$ را **جابجایی کامپتون** گویند^{۳۳}. کمیت پشت پرانتز در سمت راست تساوی از جنس طول موج است که به آن طول موج کامپتون الکترون گویند:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} . \quad (27.2)$$

تمرین ۵.۲. طول موج کامپتون الکترون، پروتون و خودتان را حساب کنید و با طول موج نور زرد و پرتو ایکس نوعی (0.1 \AA) تا 10 نانومتر) مقایسه کنید. □

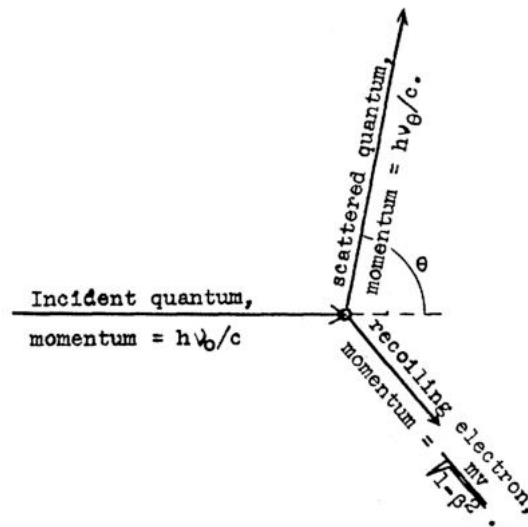
^{۳۰}Barkla

^{۳۱}او در سال ۱۹۱۷ بخاطر کارهایش در زمینه طیف نگار پرتو ایکس جایزه نوبل گرفت.

^{۳۲}A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Phys. Rev. **21**, 483 (1923).

^{۳۳}Compton shift

تمرین ۶.۲. کامپتون در مقاله ی خود (پانویس ۳۲) مطابق شکل (۹.۲) سینماتیک پراکندگی فوتون از الکترون را نشان داده است که در آن m جرم الکترون، v سرعت آن، و $\beta = v/c$ به کمک این شکل، فرمول (۲۶.۲) را بدست آورید. □



شکل ۹.۲: سینماتیک برخورد کامپتون

پس از اینکه کامپتون نظریه کوانتومی پراکندگی فوتونهای پرتو ایکس از الکترون و بر آن اساس فرمول جابجایی طول موج خود (۲۶.۲) را ارائه کرد (پانویس ۳۲)، آزمایشی را برای واری دقیق آن طراحی کرده و انجام داد. او پراکندگی پرتو ایکس از اتمهای گرافیت را در نظر گرفت. انتظار کلاسیکی این است که با توجه به خاصیت موجی تابش، پرتو ایکس فرودی الکترونهای گرافیت را با بسامدی مشابه به نوسان در آورده و آنها هم به نوبه ی خود با همان بسامد تابش کنند. اما در طیف تابش پراکنده شده از گرافیت، علاوه بر بسامد فرودی یک بسامد انتقال یافته دیده شد که از بسامد فرودی کمتر بوده و مقدار آن به زاویه ی پراکندگی بستگی دارد. شکل (۱۰.۲) برپایش آزمایش کامپتون و شکل (۱۱.۲) داده های شدت موج پراکنده شده بر حسب طول موج را در زوایای پراکندگی مختلف نشان میدهد.^{۳۴}

از نمودارهای شکل (۱۱.۲) واضح است که وقتی پرتو ایکس بوسیله ی گرافیت پراکنده میشود به دو قسمت مجزا تقسیم میگردد؛ یکی با طول موجی برابر با طول موج پرتو اولیه، و دیگری با طول موجی که نسبت به طول موج پرتو اولیه افزایش یافته است. کامپتون آنها را به ترتیب طول موجهای اصلاح نشده^{۳۵} و اصلاح شده^{۳۶} نامید. در هر نمودار، خط P از میان قله ای که نمایشگر خط اولیه است عبور کرده و خط T از زاویه ای که طبق معادله ی (۲۶.۲) انتظار است پرتو پراکنده شده ظاهر شود. به عبارتی قله ی پرتو اصلاح نشده بر روی خط P و قله ی پرتو اصلاح شده بر روی خط T قرار میگیرد. طول موج پرتو اصلاح شده بر اساس پیشبینی نظریه ی کوانتومی بر حسب زاویه پراکندگی افزایش یافته درحالیکه طول موج پرتو اصلاح نشده مطابق پیشبینی نظریه کلاسیکی است. قسمت اعظم سهم پرتو اصلاح نشده بخاطر بازتاب معمول از کریستالهای ریز گرافیت است.

تمرین ۷.۲. جابجایی های کامپتون نمودارهای شکل (۱۱.۲) را با توجه به اینکه هر دقیقه ی قوسی در محور افقی تقریباً معادل 0.01 آنگستروم است تخمین زده و با نتایج حاصل از معادله ی کامپتون (۲۶.۲) مقایسه کنید. طول موج کامپتون الکترون 0.242 آنگستروم است. برای اینکه محاسبه ی شما بهترین همخوانی را با داده ها داشته باشد، هر دقیقه ی قوسی در نمودارها را چند آنگستروم تخمین میزنید؟ این مقدار با مقدار تخمین کامپتون چقدر تفاوت دارد؟ آیا تخمین شما قابل قبول است؟ □

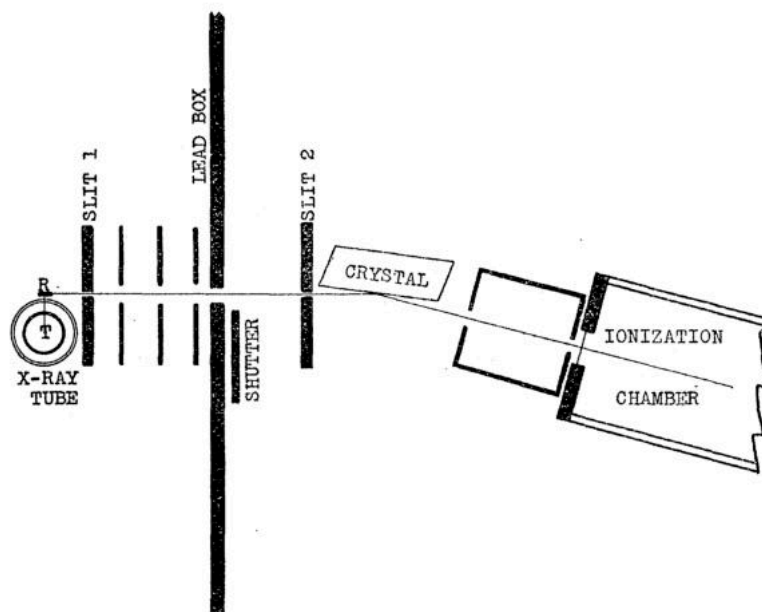
نکته ی مهم دیگری که از معادله ی (۲۶.۲) بدست می آید این است که میزان جابجایی $\Delta\lambda$ به طول موج پرتو فرودی بستگی ندارد و فقط به جرم الکترون و زاویه پراکندگی وابسته است. برای واری این ویژگی، کامپتون آزمایش خود را با پرتوهای ایکس فرودی در بازه ی گسترده ای از طول موج از 0.7 آنگستروم تا 0.25 آنگستروم انجام داد و برای تمام این بازه برای زاویه پراکندگی 90° درجه میزان جابجایی $\Delta\lambda$ تقریباً برابر 0.3 آنگستروم بود که با دقت خوبی با پیشبینی معادله (۲۶.۲) مطابقت دارد.^{۳۷}

A. H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-Rays*, Phys. Rev. **22**, 409 (1923).^{۳۴}

unmodified^{۳۵}

modified^{۳۶}

A. H. Compton, *Bill. N. R. C.*, No **20**, p. 17 (1922)^{۳۷}



شکل ۱۰.۲: برپایش آزمایش کامپتون: پرتو ایکس خروجی از T به هدف گرافیتی R برخورد کرده و با عبور از شکافهای ۱ و ۲ و پس از برخورد به کریستال کلسیت وارد اتاقک یونش شده و در آنجا شدتش اندازه گرفته میشود. صفحه ی سربی برای جلوگیری از ورود تابشهای سرگردان است. با تغییر زاویه ی شکافهای ۱ و ۲ نسبت به هدف گرافیتی R میتوان شدت موج پراکنده شده را در زوایای مختلف اندازه گرفت.

تمرین ۸.۲. نسبت انرژی فوتون پرتو ایکس با طول موج 0.1 آنگستروم را به انرژی سکون الکترون حساب کنید. این محاسبه را برای نور زرد با طول موج 570 نانومتر تکرار کنید. چه نتیجه ای میگیرید؟ □

موفقیت کامپتون در ارائه ی فرضیه ی کوانتش پرتو ایکس (پانویس ۳۲) و تایید آزمایشگاهی آن (پانویس ۳۴ و ۳۷)، آخرین تردیدها را در وجود خاصیت ذره ای تابش از بین برد و جامعه ی فیزیک که تا پیش از این تابش را به عنوان یک پدیده ی صرفاً موجی میشناخت، از این به بعد آن را به عنوان پدیده ای که دارای خاصیت دوگانه ی موجی و ذره ای است پذیرفت. برخی پدیده ها مانند شکست و بازتاب را بوسیله خاصیت موجی تابش و برخی دیگر را مانند اثر فوتوالکتریک و اثر کامپتون (که همانگونه که اینشتین در مقاله اش اشاره کرده بود شامل نابودی و گسیل نور هستند) تنها بوسیله ی خاصیت ذره ای تابش میتوان توضیح داد. کامپتون در سال ۱۹۲۷ بخاطر کشف این پدیده که بنام خود او نامگذاری شد جایزه نوبل گرفت. او سرپرست قسمت متالورژی پروژه ساخت بمب اتم آمریکا در طول جنگ جهانی دوم (پروژه ی منهتن) بود.

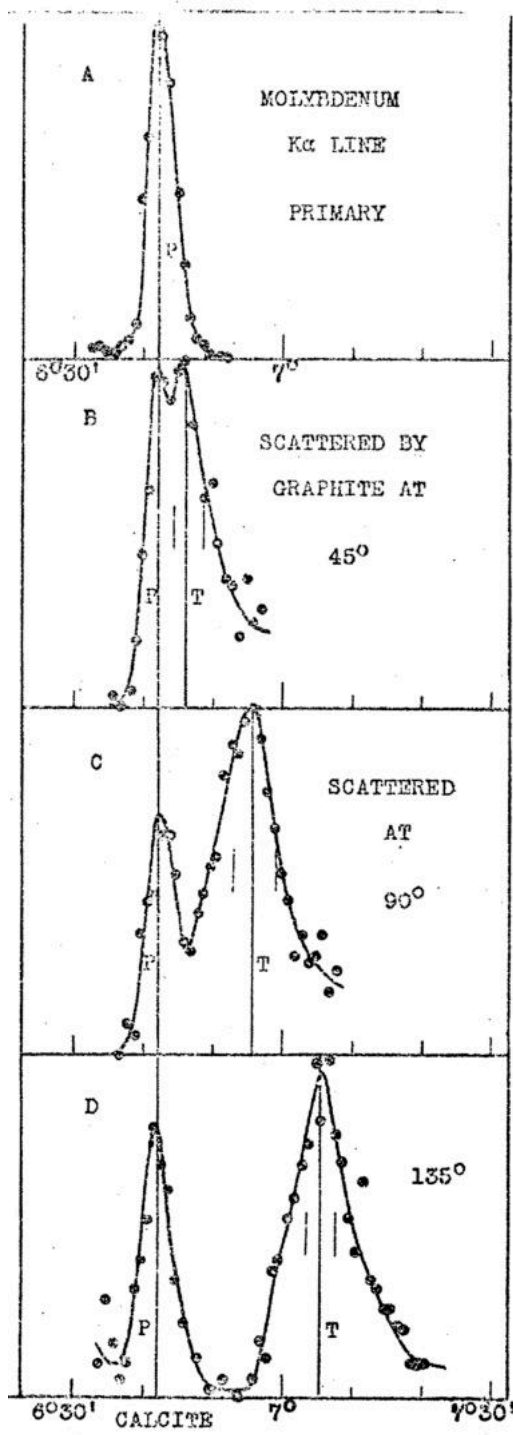
پراکندگی تامسون

اگر بسامد پرتو فرودی بسیار کمتر از بسامد نوعی پرتو ایکس باشد، یعنی $\nu \ll mc^2/h$ ، پراکندگی نور از الکترون کشسان خواهد بود و انرژی پرتو پراکنده شده تغییر نمیکند. در اینجا نور خاصیت موجی دارد و بنابراین این با معادلات ماکسول توصیف میشود. به این نوع پراکندگی که در واقع حد کلاسیکی پراکندگی کامپتون است پراکندگی تامسون گوییم. به عبارتی پراکندگی کامپتون و رفتار ذره ای نور زمانی اهمیت خواهد داشت که طول موج پرتو فرودی از طول موج کامپتون الکترون (یا هر ذره ای که نور بدان تابیده میشود) بسیار کمتر باشد. در غیر این صورت با یک پدیده ی کلاسیکی روبرو هستیم و نور رفتار موجی دارد چراکه $\Delta\lambda$ درصد بسیار کمی از λ_c بوده و قابل آشکارسازی نیست. (تمرین ۵.۲ را ببینید.)

۵.۲ مدل اتمی بوهر

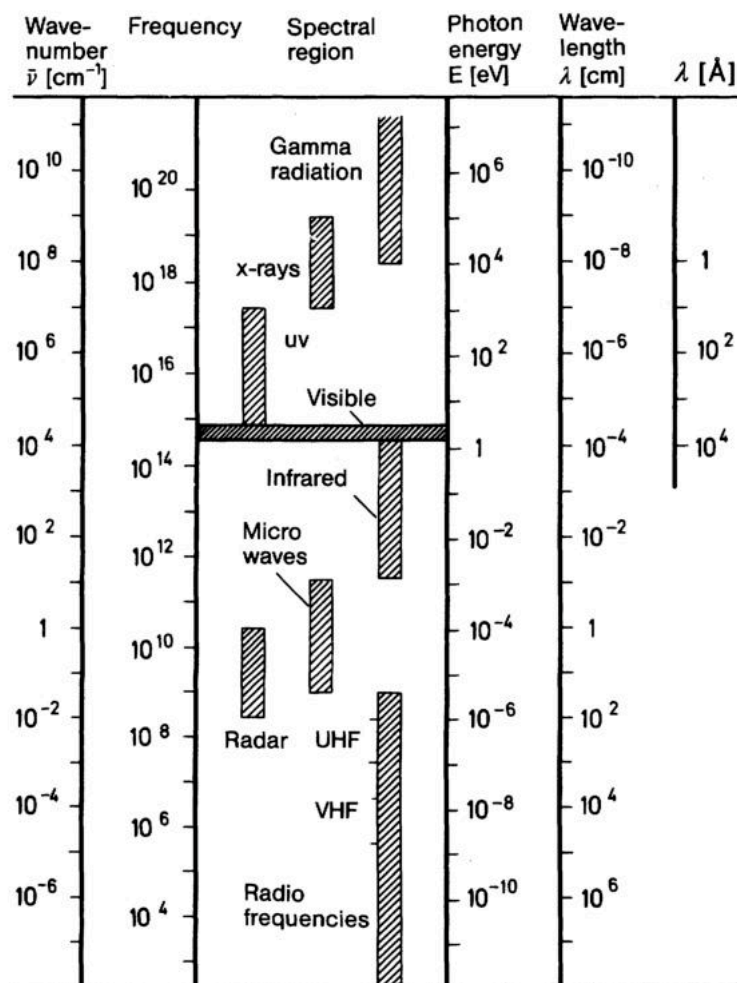
یکی از موفقیتهای ایده ی کوانتش انرژی، توانایی آن در توصیف طیف های گذار اتمی بود. طیفهای گسیلی و جذبی اتمها و ملکولها متشکل از یک سری بسامدهای خاص است که برای هر اتم یا ملکول یکتاست.

مهمترین منبع اطلاعات درباره ی ساختار الکترونی و ترکیب اتمها طیف های آنها در بازه های بسامدی مختلف از رادیویی،



شکل ۱۱.۲: نمودارهای حاصل از آزمایش کامپتون پراکندگی پراکندگی پرتو ایکس از گرافیت. نمودار A طیف پرتو ایکس فرودی را نشان میدهد و نمودارهای B، C و D پراکندگی آن را به ترتیب در زوایای ۴۵ درجه، ۹۰ درجه و ۱۳۵ درجه نشان میدهد. محور عمودی شدت را نشان میدهد. محور افقی بر حسب درجه و دقیقه ی قوسی است و بر اساس مقاله ی کامپتون (پانویس ۳۴) هر دقیقه ی قوسی تقریباً معادل ۰/۰۰۱ $\Delta\lambda$ انگستروم است. واضح است که جابجایی کامپتون $\Delta\lambda$ با افزایش زاویه پراکندگی بر طبق معادله ی (۲۶.۲) افزایش میابد. هرچقدر به سمت زوایای پراکندگی بیشتر میرویم، شدت و پهنای باند پرتو اصلاح شده افزایش میابد.

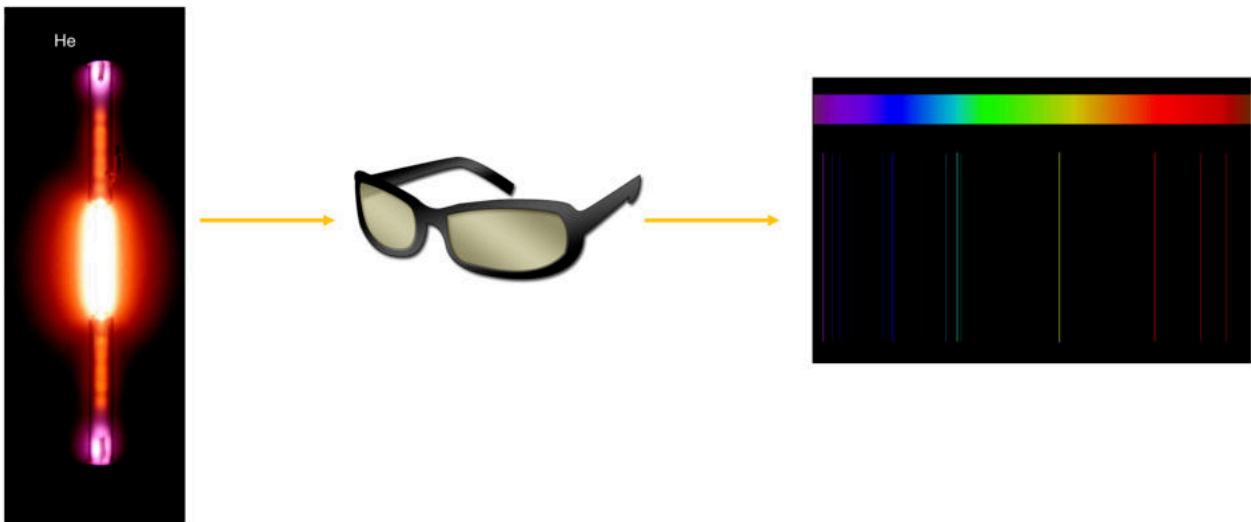
فروسرخ، تا مرئی، فرابنفش، ایکس و گاما است. در شکل (۱۲.۲) این بازه‌های بسامدی نشان داده شده‌اند. کرکهورف و بنزن^{۳۸} بنیانگذاران طیف سنجی اولین کسانی بودند که در اواسط قرن ۱۹ کشف کردند که هر عنصر طیف بخصوص خود را داراست.



شکل ۱۲.۲: بازه‌های بسامدی امواج الکترومغناطیسی.

طیفهای اپتیکی به سه دسته‌ی پیوسته، نواری^{۳۹} و خطی تقسیم میشوند. طیفهای پیوسته بوسیله‌ی جامدات یا گازهای چگال گسیل میشوند. طیفهای نواری که متشکل از گروههایی از تعداد زیادی خطوط طیفی بسیار نزدیک به هم هستند ویژه‌ی ملکولها هستند. اطلاعات درون این طیفها زمانی روشن و گویا خواهند بود که اتمهای تابش کننده تقریباً از هم مستقل باشند، همانگونه که در تخلیه الکتریکی گازها در فشار کم شاهد آن هستیم؛ بر خلاف آنچه در حالت جامد گداخته شاهد آن هستیم. در این حالت تابش گسیلی در یک بازه‌ی با پهنای بسیار کم متمرکز شده (مثلاً $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-5}$) که تشکیل خطوط طیفی تیز و باریک را میدهند. این خطوط طیفی توسط اتمها در حالت گازی و کم فشار گسیل میشوند که خطوط تکی هستند که ترتیب و بسامد آنها برای هر اتم یکتاست. طیفهای اپتیکی را میتوان بوسیله‌ی گسیل یا جذب مشاهده کرد. برای اینکه یک اتم تابش گسیلی داشته باشد باید به آن انرژی داد که میتواند از طریق تابش، برخورد الکترون، یا روشهای دیگر باشد. به عنوان مثال برای بدست آوردن طیف تابشی اتم هلیوم، مطابق شکل (۱۲.۲) بوسیله‌ی عبور الکتریسیته از میان لوله‌ی شیشه‌ای حاوی هلیوم آنرا تحریک میکنند. اتمها انرژی دریافتی را از طریق تابش گسیل میدارند که بوسیله‌ی یک توری میتوان آنها را به خطوط رنگی مجزا جدا کرد. طیف تابشی منتج، متشکل از تک بسامدهایی است که ویژه‌ی اتم هلیوم بوده و به عبارتی اثر انگشت آن است! یعنی در طیف گسیلی از یک ماده‌ی ناشناس اگر چنین بسامدهایی را مشاهده کردیم، آن ماده حاوی هلیوم است.

Bunsen^{۳۸}
band^{۳۹}



شکل ۱۳.۲: مشاهده ی طیف تابشی هلیوم. در شکل سمت چپ، با عبور الکتریسیته از لوله ی شیشه ای حاوی گاز هلیوم آنرا تحریک کرده و انرژی اش افزایش میابد. اتمهای هلیوم انرژی دریافتی را بصورت تابش گسیل میدارند. در شکل وسط یک عینک میبینید که نمایشگر توری پراش است که طیف تابش گسیلی را به رنگهای جداگانه تقسیم میکند. شکل سمت چپ نتیجه ی نهایی را که طیف تابشی هلیوم است را میبینید. در بالای آن طیف پیوسته ی نور سفید قرار دارد و مشخص است که طیف تابشی هلیوم گسسته و مجموعه ای از رنگهای (بسامدی) تکی است.

تمرین ۹.۲. در شکل (۱۴.۲) طیف گسیلی یک ماده نامعلوم به همراه طیف گسیلی هیدروژن، سدیم، هلیوم، نئون و جیوه را میبینید. کدامیک از این عناصر در ماده نامعلوم وجود دارند؟ □

طیفهای گسیلی یا جذبی با واحدهای مختلفی بیان میشوند:

۱. بر حسب **طول موج** که بوسیله ی توری پراش قابل تعیین است. البته باید یک طول موج مبنا را برای مدرج کردن آن بکار بریم. طول موج استاندارد معمولاً خط زرد ^{86}Kr است که برای آن داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{Kr}} &= 6057.80211 \text{ \AA} , \\ \bar{\nu}_{\text{Kr}} &= (\lambda_{\text{Kr}})^{-1} = 1650763.73 \text{ m}^{-1} .\end{aligned}\quad (28.2)$$

با دانستن این طول موج که به منزله ی مدرج کردن توی پراش ما است مقدار هر طول موج خروجی از توری پراش را میتوانیم معین کنیم. طول موجها معمولاً در خلا بیان میشوند و با مقدار آنها در هوا متفاوت است که به ضریب شکست هوا بستگی دارد:

$$\lambda_{\text{air}} = \lambda_{\text{vac}}/n . \quad (29.2)$$

۲. بر حسب **بسامد** که البته معمولتر است چراکه به محیط بستگی ندارد:

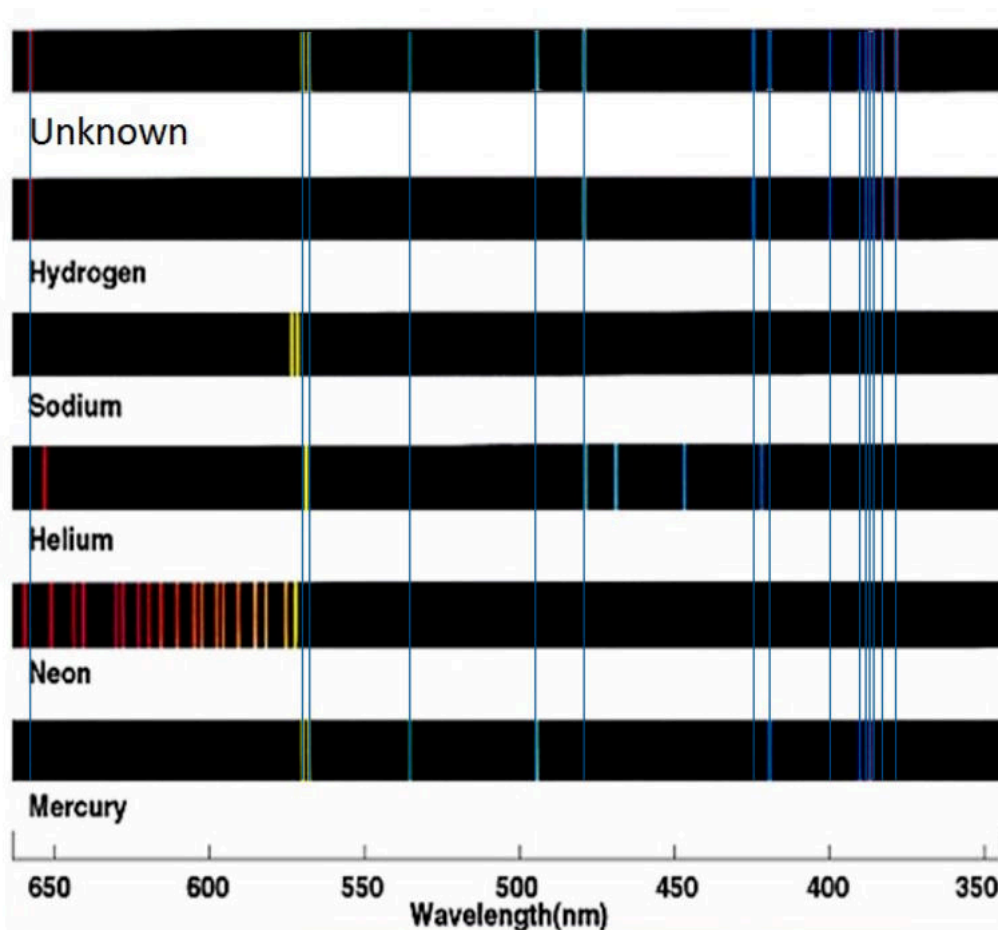
$$\nu = \frac{c}{\lambda_{\text{vac}}} = \frac{c}{n\lambda_{\text{air}}} . \quad (30.2)$$

۳. بر حسب **انرژی** که در مقیاسهای اتمی و زیر اتمی با واحد الکترون-ولت بیان میشود.

۱.۵.۲ طیف اتم هیدروژن

هیدروژن ساده ترین عنصر است که اتم آن از یک پروتون و الکترون تشکیل شده است. مطالعه طیف هیدروژن نقش بسیار مهمی در صد سال اخیر در شناخت قوانین ساختارهای اتمی داشته است. طیف گسیلی هیدروژن چهار خط ویژه طیفی را در محدوده

calibration^{۴۰}



شکل ۱۴.۲: طیف تابشی یک ماده نامعلوم، هیدروژن، سدیم، هلیوم، نئون و جیوه. از روی طیف شناخته شده عناصر مختلف میتوان فهمید یک ماده نامعلوم از چه عناصری تشکیل شده است.

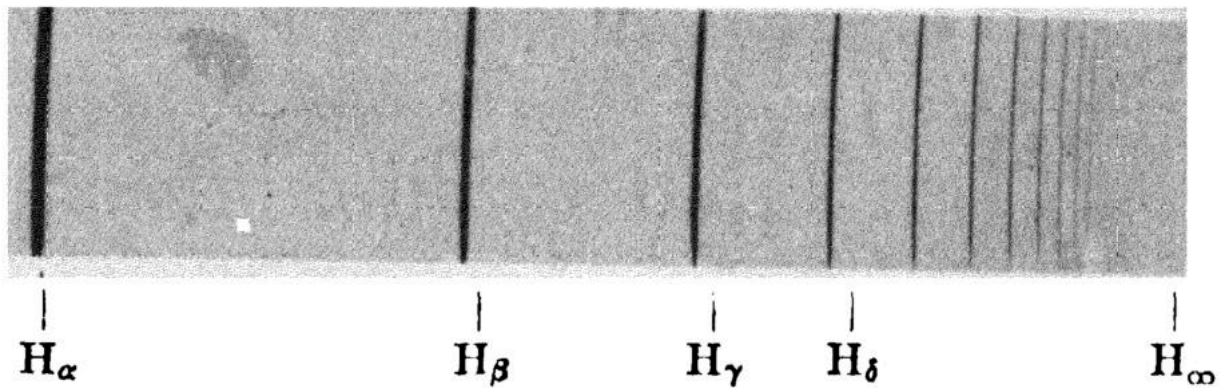
ی مرئی نشان میدهد که به ترتیب افزایش بسامد برابند با:

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &= 6562.8 \text{ \AA} , \\ H_{\beta} &= 4861.3 \text{ \AA} , \\ H_{\gamma} &= 4340.5 \text{ \AA} , \\ H_{\delta} &= 4101.7 \text{ \AA} , \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

که در شکل (۱۵.۲) نشان داده شده است. پررنگترین (پرشدت ترین) این خطوط را آنگستروم در سال ۱۸۵۳ کشف کرد که امروزه H_{α} نامیده میشود. در نزدیکی محدوده ی فرابنفش خطوط دیگری پس از این چهار خط وجود دارند که با کاهش طول



شکل ۱۵.۲: چهار خط مرئی سری بالمر اتم هیدروژن که به ترتیب بر حسب کاهش طول موج (افزایش بسامد) در محدوده ی قرمز، فیروزه ای، آبی و بنفش قرار گرفته اند.



شکل ۱۶.۲: خطوط طیفی سری بالمر با کاهش طول موج به سمت طول موج حدی H_∞ میل میکنند.

موج به هم نزدیک و نزدیکتر میشوند تا مطابق شکل (۱۶.۲) به یک حد طول موج پایین H_∞ میرسند. در سال ۱۸۸۵ بالمر^{۴۱} (یک معلم دبیرستان سوئیسی) دریافت که طول موجهای این خط طیفی با دقت بسیار خوبی در رابطه زیر صدق میکنند^{۴۲}:

$$\lambda_n = 3646 \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \text{ \AA} \quad (n = 3, 4, \dots) . \quad (۳۲.۲)$$

خطوط این طیف را به ازای n های مختلف خطوط سری بالمر گویند.

یک سرخ بسیار مهم با این کشف بدست آمد که معکوس طول موج کمیت مناسب تری برای بیان خطوط طیفی است. معلوم شد که اگر خطوط طیفی بر حسب معکوس طول موج بیان شوند مقدار $1/\lambda$ برای بسیاری از خطوط برابر با جمع یا تفریق معکوس طول موج دو خط دیگر است. اینگونه روابط برای خطوط طیفی بسیاری از عناصر پیدا شده و توسط ریذبرگ در سال ۱۹۰۰^{۴۳} و ریتز در سال ۱۹۰۸^{۴۴} منتشر شده بودند. این کشف که به آن اصل ترکیب ریذبرگ-ریتز گویند توصیف یک طیف پیچیده را به کمک چند جمله ی اساسی ممکن میسازد که یک نمونه آن در شکل (۱۷.۲) نشان داده شده است. هر خط افقی نماینده ی مقدار یک جمله ی بخصوص است و طول هر پیکان عمودی بین دو جمله مقدار $1/\lambda$ ی یک خط طیفی ممکن است. برای سری بالمر استفاده از معکوس طول موج به رابطه زیر منتج میشود:

$$\lambda^{-1} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots , \quad (۳۳.۲)$$

که در آن R_H ثابت ریذبرگ^{۴۵} و برابر است با:

$$R_H = 10,967,758.10 \text{ m}^{-1} . \quad (۳۴.۲)$$

بنابراین مقدار $1/\lambda$ برای هر خط سری بالمر بصورت تفریق دو جمله است: مقدار ثابت $R_H/4$ و مقدار متغیر R_H/n^2 . بعدا خواهیم دید که این مستقیما با اختلاف انرژی بین یک تراز بخصوص از اتم هیدروژن با ترازهای دیگر مرتبط است. یک مقایسه بین بیست خط اول سری بالمر در جدول (۱۸.۲) نشان میدهد که مقدار محاسباتی و مقدار اندازه گیری شده نشان میدهد که فرمول (۳۳.۲) فقط یک تقریب خوب نیست، بلکه کل سری را با دقت چشمگیری توصیف میکند. در بالای حد پیوسته ی H_∞ هیچ خط گسسته ای دیده نمیشود و طیف پیوسته است.

رابطه (۳۳.۲) بالمر این ایده را به ریذبرگ داد که خطوط دیگر اتم هیدروژن هم ممکن است وجود داشته باشد. او در سال ۱۸۸۹ به درستی معادله ی بالمر را به رابطه ی زیر تعمیم داد:

$$\lambda^{-1} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad n_2 > n_1 . \quad (۳۵.۲)$$

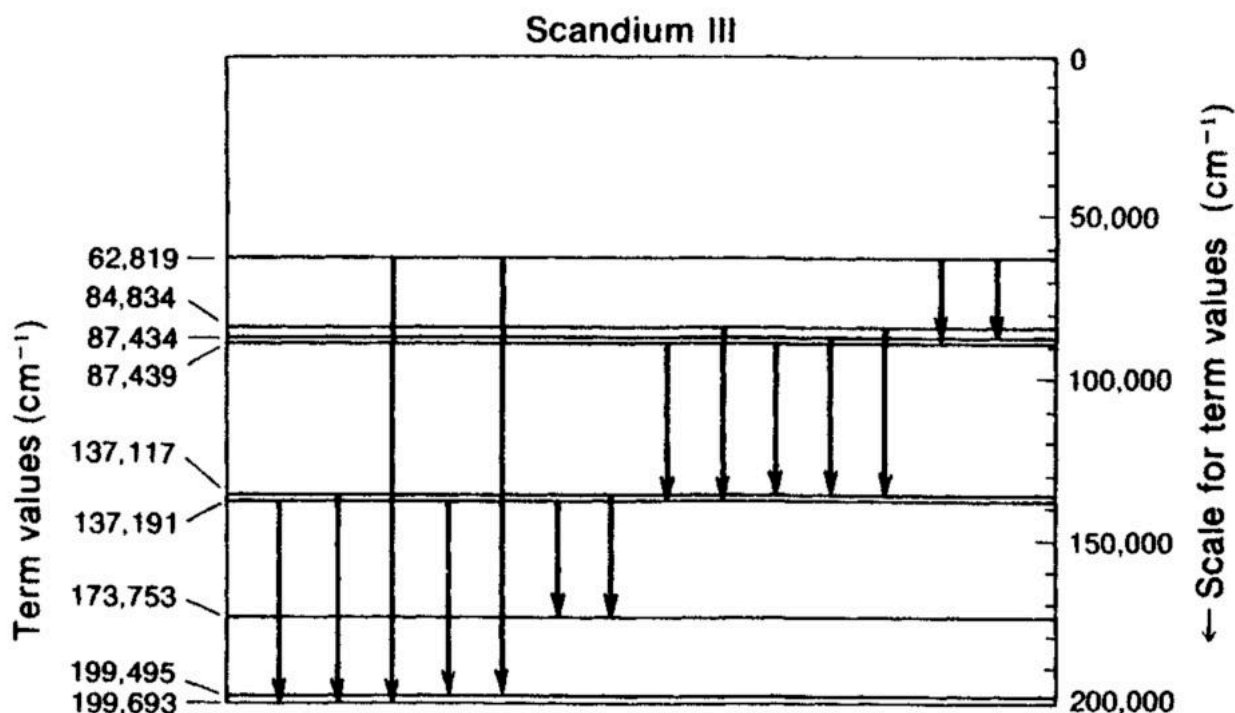
^{۴۱}Balmer

^{۴۲}J. J. Balmer, *Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs*, Ann. Phys. **25**, 80 (1885)

^{۴۳}J. R. Rydberg, Report of Intl. Phys. Cong. at Paris, ii, 200 (1900)

^{۴۴}W. Ritz, Phys. Z, **9**, 521, (1908); Astrophys. J. **28**, 237 (1908).

^{۴۵}Rydberg constant



شکل ۱۷.۲: نمودار جملات برای اسکاندیم دوبار مثبت. هر پیکان عمودی نماینده ی یک خط طیفی مشاهده شده است. طول هر پیکان متناسب با معکوس طول موج خط طیفی است. در این حالت خاص، چهارده مقدار $1/\lambda$ با استفاده از فقط ۹ مقدار جمله اساسی قابل محاسبه است.

رابطه ی (۳۳.۲) بالمر حالتی خاص از رابطه ی (۳۵.۲) ریذبرگ است. سری بالمر به ازاء $n_1 = 2$ و $n_2 = 3, 4, \dots$ بدست می آید. اگر بجای n_1 مقادیر ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ را قرار دهیم با شرط $n_2 > n_1$ به خطوط طیفی جدیدی میرسیم که هر کدام در سالهای بعد به تدریج مشاهده شدند و از قرار زیر هستند:

۱. سری لایمن^{۴۶} با $n_1 = 1$ و $n_2 = 2, 3, \dots$ که در محدوده ی فرابنفش قرار دارد و بین سالهای ۱۹۰۶ تا ۱۹۱۴ مشاهده شد.
۲. سری پاشن^{۴۷} با $n_1 = 3$ و $n_2 = 4, 5, \dots$ که در محدوده ی فروسرخ نزدیک قرار دارد و در سال ۱۹۰۸ مشاهده شد.
۳. سری براکت^{۴۸} با $n_1 = 4$ و $n_2 = 5, 6, \dots$ که در محدوده ی فروسرخ قرار دارد و اولین خطوطش در سال ۱۹۲۲ مشاهده شد.
۴. سری فوند^{۴۹} با $n_1 = 5$ و $n_2 = 6, 7, \dots$ که در محدوده ی فروسرخ دور قرار دارد و در سال ۱۹۲۴ مشاهده شد.
۵. سری هامفری^{۵۰} با $n_1 = 6$ و $n_2 = 7, 8, \dots$ که در ناحیه فروسرخ دور قرار دارد و در سال ۱۹۵۳ مشاهده شد.

جدول (۱۹.۲) (آ) محدوده ی طول موجی سری های مختلف طیفی هیدروژن را نشان میدهد. با توجه به فرمول (۳۵.۲) و داده های شکل (۱۹.۲) (آ) چنین نتیجه گرفته میشود که بسامدهای (یا معکوس طول موج) تمامی خطوط طیفی را میتوان بصورت تفاضل جملاتی به شکل عمومی R_H/n^2 نوشت. بعدا خواهیم دید که این جملات متناسب با انرژی هر تراز اتمی هستند. نمودار (۱۹.۲) (ب) خطوط طیفی سریهای مختلف به همراه انرژی مرتبط با آنها را نشان میدهد. همچنین نمایش توزیع طیفی این خطوط را در شکل (۲۰.۲) میتوان دید.

Lyman^{۴۶}
Paschen^{۴۷}
Brackett^{۴۸}
Pfund^{۴۹}
Humphreys^{۵۰}

n	$1/\lambda [\text{cm}^{-1}]$	$R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$
H $_{\alpha}$ 3	15233.21	15233.00
H $_{\beta}$ 4	20564.77	20564.55
H $_{\gamma}$ 5	23032.54	23032.29
H $_{\delta}$ 6	24373.07	24372.80
H $_{\epsilon}$ 7	25181.33	25181.08
H $_{\zeta}$ 8	25705.84	25705.68
H $_{\eta}$ 9	26065.53	26065.35
H $_{\theta}$ 10	26322.80	26322.62
H $_{\iota}$ 11	26513.21	26512.97
H $_{\kappa}$ 12	26658.01	26657.75
H $_{\lambda}$ 13	26770.65	26770.42
H $_{\mu}$ 14	26860.01	26859.82
H $_{\nu}$ 15	26932.14	26931.94
H $_{\xi}$ 16	26991.18	26990.97
H $_{\omicron}$ 17	27040.17	27039.89
H $_{\pi}$ 18	27081.18	27080.88
H $_{\rho}$ 19	27115.85	27115.58
H $_{\sigma}$ 20	27145.37	27145.20

شکل ۱۸.۲: بیست خط اول سری بالمر اتم هیدروژن. تطابق مقدار اندازه گیری شده (ستون دوم) با مقدار محاسباتی (ستون سوم) چشمگیر است.

۲.۵.۲ مدل اتمی راترفورد

در اوایل قرن بیستم مدل‌های اتمی مختلفی ارائه شد. کشف هسته توسط راترفورد^{۵۱} که بر اساس آزمایش پراکندگی ذرات آلفا از ورقه‌های نازک طلا بود که توسط گایگر^{۵۲} و مارسدن^{۵۳} در سال ۱۹۰۹^{۵۴} انجام شد، ساختار متفاوتی از اتم نسبت به آنچه مدل تامسون پیش از آن بیان کرده بود ارائه داد. راترفورد در مقاله‌اش در سال ۱۹۱۱^{۵۵} داد‌های حاصل از پراکندگی را با این فرض با موفقیت توضیح داد که بار مثبت و قسمت عمده ی جرم اتم در یک فضای کوچکی که در مقایسه با حجم کل اتم بسیار ناچیز است متمرکز شده است. اندازه گیری‌های بعدی نشان داد که شعاع هسته کمتر از 10^{-4} برابر شعاع اتم است که چیزی از مرتبه 10^{-15} m می‌شود.

راترفورد در مدل خود فرض کرد که الکترون در مدارهای دایره‌ای به شعاع r با سرعت v به دور هسته می‌چرخد؛ چیزی شبیه به چرخش زمین و دیگر سیارات منظومه شمسی به دور خورشید. نیروی مرکزگرای ناشی از جاذبه ی الکتریکی بین الکترون و هسته، که در اتم هیدروژن یک پروتون است مولد حرکت دایره‌ای یکنواختی با سرعت زاویه‌ای ω خواهد بود یعنی:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e r \omega^2, \quad (۳۶.۲)$$

که m_e جرم الکترون و e بزرگی بار الکترون و پروتون است. انرژی الکترون برابر مجموع انرژی جنبشی حاصل از چرخش به دور هسته و انرژی پتانسیل الکتریکی است که برابر است با

$$E = \frac{1}{2} m_e r^2 \omega^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (۳۷.۲)$$

Rutherford^{۵۱}

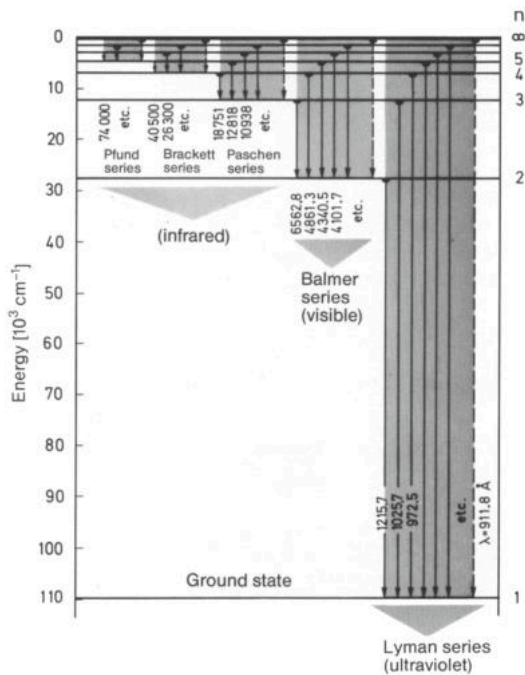
Geiger^{۵۲}

Marsden^{۵۳}

H. Geiger and E. Marsden, *On a diffuse reflection of the α -particles*, Proc. Roy. Soc. A **82**, 495 (1909).^{۵۴}

E. Rutherford, *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom*, Phil. Mag. **21**, 669^{۵۵}

(1911).

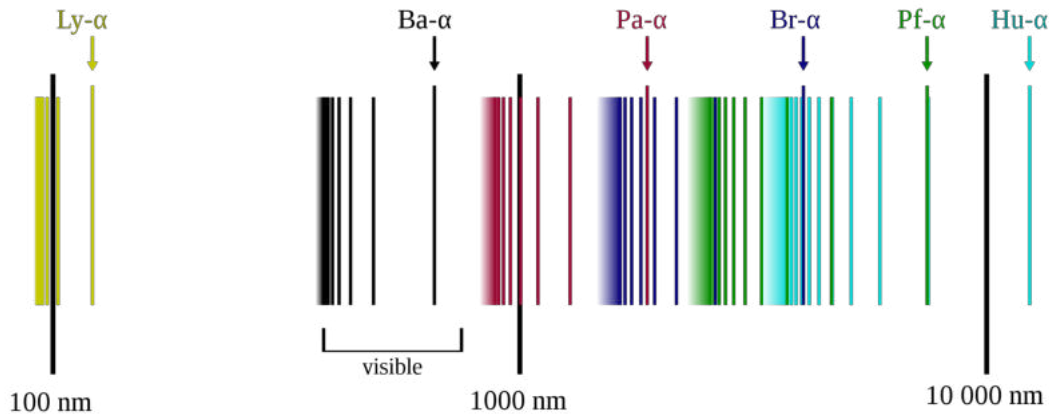


Lyman series	$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$	$\lambda_1 = 121.6 \text{ nm}$	Ultraviolet
	$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right)$	$\lambda_\infty = 91.2 \text{ nm}$	
Balmer series	$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$	$\lambda_1 = 656.5 \text{ nm}$	Visible and ultraviolet
	$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right)$	$\lambda_\infty = 364.7 \text{ nm}$	
Paschen series	$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)$	$\lambda_1 = 1.876 \mu\text{m}$	Near infrared
	$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right)$	$\lambda_\infty = 0.822 \mu\text{m}$	
Brackett series	$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right)$	$\lambda_1 = 4.052 \mu\text{m}$	Infrared
	$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{\infty} \right)$	$\lambda_\infty = 1.459 \mu\text{m}$	
Pfund series	$\frac{1}{\lambda_1} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right)$	$\lambda_1 = 7.460 \mu\text{m}$	Far infrared
	$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{\infty} \right)$	$\lambda_\infty = 2.279 \mu\text{m}$	

(ب) نمودار خطوط طیفی اتم هیدروژن و دسته بندی سریها. مقادیر انرژی منفی هستند چراکه انرژی بستگی الکترون به اتم میباشد. بنابراین مقدار انرژی به ازاء n_∞ بیانگر انرژی یونش است که انرژی لازم برای جداسازی کامل الکترون از قید اتم میباشد.

(ا) محدوده های طول موجی سری های مختلف اتم هیدروژن. λ_1 اولین خط با بیشترین طول موج (کمترین بسامد) و λ_∞ کمترین طول موج (بیشترین بسامد) برای هر سری است. به λ_∞ حد سری هم گفته میشود.

شکل ۱۹.۲: محدوده طول موج و نمودار سریهای اتم هیدروژن



شکل ۲۰.۲: توزیع طیفی سری های مختلف اتم هیدروژن در مقیاس لگاریتمی. خطوط α اولین خط طیفی هر سری متناظر با λ_1 در جدول (۱۹.۲) است.

منفی بودن انرژی پتانسیل به عنوان انرژی بستگی الکترون به هسته ناشی از این است که نیروی بین الکترون و هسته از نوع جاذبه و الکترون مقید به هسته است. با جایگذاری از (۳۶.۲) در (۳۷.۲) برای انرژی الکترون خواهیم داشت:

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{(e^4 m_e \nu^2)^{1/3}}{2(2\epsilon_0)^{2/3}} \quad (38.2)$$

که بوضوح همواره منفی است که بیانگر این واقعیت است که الکترون مقید به هسته است.

۳.۵.۲ اصول موضوعه ی بوهر

مدل اتمی راترفورد اگرچه ساختار اتم را بخوبی توصیف میکرد، اما اگر بخواهد گسیل یا جذب تابش را توصیف کند به مشکل بر خواهد خورد. با توجه به معادله ی (۳۸.۲) چون شعاع الکترون کمیته پیوسته است پس انرژی هم پیوسته بوده و بنابراین برای تابش گسیلی (و یا جذبی) باید طیف پیوسته ای از انرژی مجاز باشد. بعلاوه الکترون بخاطر حرکت دایره ای به دور هسته، شتابدار بوده و بنابراین باید از خود تابش الکترومغناطیسی با بسامدی برابر با بسامد حرکتش به دور هسته، $\nu = \omega/2\pi$ گسیل دارد که با توجه به پیوسته بودن شعاع و انرژی، انتظار داریم طیف انرژی تابشی بازه ی پیوسته ای از بسامدها را گسیل کند. درحالیکه مشاهدات نشان میدهند (شکل‌های (۱۳.۲) تا (۲۰.۲) را ببینید) که طیف تابشی اتمها شامل بسامدهای گسسته است. بنابراین مدل راترفورد به اشتباه خطوط گسسته ی طیف های اتمی را پیوسته پیشبینی میکند.

مشکل دوم به مراتب جدی تر است. الکترون بخاطر حرکت شتابدار به دور هسته تابش کرده و بصورت پیوسته انرژی از دست میدهد و با کاهش انرژی، شعاع آن کم شده و به درون هسته می افتد. بنابراین مدل راترفورد اتمها را ناپایدار پیشبینی کرده و زندگی همه ی ما را با خطر جدی مواجه میکند!

برای فائق آمدن بر این ناهمخوانیها با قوانین فیزیک کلاسیک، بوهر سه اصل موضوع را مطرح کرد که انحراف رفتار الکترون در اتم را از فیزیک کلاسیک توصیف میکند. این اصول موضوعه در برساختن مکانیک کوانتومی نقش بسیار مهمی ایفا کردند. او در نوشتن اصول موضوعه خود هم از فیزیک کلاسیک و هم از ایده ی کوانتش انرژی پلانک و اینشتین کمک گرفت. اصول موضوعه ی بوهر از قرار زیر هستند:

۱. معادلات کلاسیکی برای حرکت الکترون به دور هسته صادق هستند و مدارهای الکترون به دور هسته مانند مدارهای سیارات به دور خورشید است. اما فقط مدارهای گسسته ی مشخصی با انرژی بستگی E_n مجازند. او این مدارها را **مدار مانا**^{۵۶} نامید.

۲. الکترون مادامی که در این مدارهای مانا قرار دارد تابش نمیکند و فقط زمانی که از یک مدار مانا با انرژی بستگی E_{n_2} به مدار مانای دیگر با انرژی بستگی E_{n_1} میرود ($E_{n_2} > E_{n_1}$) فوتونی با بسامد

$$\nu = \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h} \quad (۳۹.۲)$$

گسیل میدارد. فرایند جذب برعکس این است. بوهر با مقایسه ی معادله ی بالا با رابطه ی (۳۵.۲) ریذبرگ انرژی بستگی E_n را به شکل زیر نوشت:

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}, \quad (۴۰.۲)$$

که علامت منفی بیانگر انرژی بستگی الکترون است.

۳. با افزایش شعاع r الکترون به دور هسته، قوانین فیزیک اتمی کوانتومی با قوانین فیزیک کلاسیک یکی میشوند که آن را **اصل تطابق**^{۵۷} نامید.

اصل اول و دوم اگرچه مدارهای الکترون به دور هسته را بخوبی توصیف کرده و اما قید گسسته بودن آنها و بویژه عدم تابش در این مدارها کاملا با فیزیک کلاسیک در تعارض است، اگرچه بخوبی گسسته بودن خطوط طیفی و همچنین پایداری اتم را توجیه میکنند.

بوهر همچنین اصل تطابق را بدین منظور مطرح کرد که بتواند ثابت تجربی ریذبرگ R_H را بر حسب کمیت های اتمی بدست آورد. در فیزیک کلاسیک، بسامد مداری حرکت الکترون به دور هسته، $\nu = \omega/2\pi$ ، با بسامد تابش گسیلی آن یکی است. در حالیکه مشاهدات میگوید بویژه در مدارهای با شعاع کم (و نزدیک به هسته) چنین نیست. بنابراین بوهر اصل سوم را فرض کرد تا بتواند در مدارهای دور از هسته از نتایج فیزیک کلاسیکی برای محاسبه ی ثابت ریذبرگ استفاده کند. البته این اصل بعدا اهمیت بسیار زیادی بخصوص در برساختن مکانیک کوانتومی و تعبیر آن یافت.

بدین منظور، تابش گسیل شده ناشی از گذار الکترون بین دو تراز مجاور، یعنی $n_2 - n_1 = 1$ ، و بسیار دور از هسته، یعنی با n بزرگ، را در نظر میگیریم. ابتدا فرض میکنیم $n_2 - n_1 = \tau$ و با جایگذاری (۴۰.۲) در (۳۹.۲) خواهیم داشت:

$$\nu = R_H c \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R_H c \left(\frac{1}{(n_2 - \tau)^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (۴۱.۲)$$

stationary orbit^{۵۶}
correspondence principle^{۵۷}

که برای ترازهای دور از هسته و با قرار دادن $n_2 = n$ می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\nu = \frac{R_{HC}}{n^2} \left(\frac{1}{(1 - \tau/n)^2} - 1 \right) \approx R_{HC} \frac{2\tau}{n^3}. \quad (42.2)$$

به ازاء $1 = \tau$ در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\nu = R_{HC} \frac{2}{n^3}. \quad (43.2)$$

در این مرحله بوهر با استفاده ی هوشمندانه از اصل تطابقش، این بسامد را برابر با بسامد کلاسیکی دوران الکترون به دور هسته از معادله ی (۳۸.۲) قرار داد. بنابراین با برابر قرار دادن انرژی بستگی کلاسیکی (۳۸.۲) با انرژی بستگی کوانتومی (۴۰.۲) در حد کلاسیکی $1 \gg n$ ، و جایگذاری بسامد بدست آمده در رابطه ی (۴۳.۲) رابطه ی زیر برای ثابت ریذبرگ بدست می آید:

$$R_H = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 c h^3}. \quad (44.2)$$

اکنون ثابت ریذبرگ که تا پیش از این یک ثابت تجربی بود بر حسب دیگر ثوابت فیزیکی بدست آمد.

البته این محاسبات با این فرض بود که هسته ی اتم هیدروژن ثابت در نظر گرفته شود. درحالیکه عملاً الکترون و پروتون به دور مرکز جرم مشترک شان میچرخند. در این حالت باید بجای جرم الکترون از جرم کاهیده ی سامانه ی دوتایی الکترون-پروتون استفاده کنیم:

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}. \quad (45.2)$$

بنابراین محاسبات بالا با این فرض بود که جرم هسته بینهایت در نظر گرفته شود و به همین دلیل بجای R_H از R_∞ استفاده میکنیم که مقدار محاسباتی آن برابر است با

$$R_\infty = 10,973,731.568 \text{ m}^{-1}, \quad (46.2)$$

که با مقدار مشاهداتی بصورت چشمگیری در توافق است.

تمرین ۱۰.۲. رابطه ی بین R_H و R_∞ را بدست آورید. مقدار این دو چند درصد با هم اختلاف دارد؟ □

در این مرحله، برای بدست آوردن یک عبارت تحلیلی برای انرژی بستگی الکترون در اتم هیدروژن کافیت ثابت ریذبرگ را از (۴۴.۲) در رابطه ی (۴۰.۲) جایگذاری کنیم که بدست می آوریم:

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0 h^2 n^2}. \quad (47.2)$$

اگر مقادیر عددی ثابتهای فیزیکی را وارد کنیم به مقدار زیر برای انرژی بستگی الکترون به هسته اتم هیدروژن میرسیم:

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}. \quad (48.2)$$

مقدار انرژی بدست آمده منفی و بیانگر تقید الکترون به هسته است. بنابراین کمترین انرژی که به آن حالت پایه^{۵۸} میگوییم منفی ترین آن است که به ازاء $n = 1$ بدست می آید:

$$E_G = E_1 = -13.6 \text{ eV}, \quad (49.2)$$

که برابر انرژی یونش هیدروژن یا به عبارتی مقدار انرژی است که لازم است به یک الکترون در حالت پایه اتم هیدروژن بدهیم تا آن را از قید هسته جدا کرده و یک هیدروژن یک بار مثبت یا به عبارتی یک تک پروتون بدست آوریم. این مقدار انرژی یونش

^{۵۸} ground state

بدست آمده با مقدار اندازه گیری شده ی آن در توافق بسیار خوبی قرار داشت و یک موفقیت تمام عیار برای نظریه ی اتمی بوهر بود.

با برابر قرار دادن رابطه ی (۴۰.۲) با (۳۸.۲) و جایگذاری (۴۴.۲) در آن، رابطه ی زیر برای شعاع مدارهای مانای بوهر بدست می آید:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} n^2 = a_0 n^2. \quad (50.2)$$

به n عدد کوانتومی اصلی^{۵۹} میگویند که یک عدد طبیعی است یعنی: $n = 1, 2, 3, \dots$. همچنین a_0 شعاع بوهر است که برابر است با

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 5.291 \times 10^{-11} \text{ m}. \quad (51.2)$$

همچنین میتوان تکانه ی زاویه ای مداری الکترون به دور هسته را حساب کرد. با توجه به اینکه مدار حرکت را دایره ای فرض کرده ایم، بردارهای سرعت و مکان بر هم عمودند و بنابراین بزرگی تکانه ی زاویه ای مداری برابر است با

$$|\mathbf{L}_e| = L_e = r_n m_e v_n = m_e r_n^2 (2\pi\nu), \quad (52.2)$$

که با جایگذاری (۴۳.۲) و (۴۴.۲) در آن خواهیم داشت:

$$L_e = \frac{h}{2\pi} n, \quad (53.2)$$

که بیانگر این است که تکانه ی زاویه ای الکترون به دور هسته کوانتیده است. این نتیجه گاهی (به اشتباه) به عنوان اصل سوم بوهر معرفی میشود.

مرسوم است که بجای h از کمیت

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (54.2)$$

در معادلات استفاده میشود، چراکه شکل معادلات تر و تمیز تر خواهد بود و مقدار آن برابر است با

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J.s}. \quad (55.2)$$

از این به بعد هر جا از ثابت پلانک اسمی آوردیم منظور \hbar است. بنابراین معادلات (۵۰.۲) و (۵۳.۲) بر حسب \hbar بصورت زیر نوشته میشوند:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} n^2, \quad (56.2)$$

$$L_e = n\hbar. \quad (57.2)$$

میتوان انرژی بستگی (۴۷.۲) را هم بر حسب \hbar به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}. \quad (58.2)$$

با تعریف کمیت بدون بعد

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (59.2)$$

principal quantum number^{۵۹}

که به دلایل تاریخی به آن ثابت ساختار ریز^{۶۰} میگویند، میتوانیم انرژی بستگی الکترون را در اتم هیدروژن به صورت زیر بازنویس کنیم:

$$E_n = -\frac{1}{2}m_e c^2 \frac{\alpha^2}{n^2}. \quad (۶.۲)$$

اهمیت معرفی α در فصلهای متاخر کتاب معلوم میشود. اما بصورت خلاصه α بیانگر قدرت برهمکنش میدان الکترومغناطیسی با ذره باردار است.

تمرین ۱۱.۲. پاد ذره ی الکترون، ذره ای است با جرمی دقیقاً برابر آن ولی با بار مثبت که به آن پوزیترون گویند. هرگاه در اتم هیدروژن بجای هسته ی پروتون، ذره ی پوزیترون را قرار دهیم، ساختار مقیدی که شکل میگیرد پوزیترونیم^{۶۱} نام دارد. انرژی بستگی الکترون را در این ساختار مقید بدست آورید. □

تمرین ۱۲.۲. سامانه‌هایی مانند He^+ ، Li^{++} ، و ... ساختاری شبیه اتم هیدروژن دارند با این تفاوت که بار هسته بجای e برابر Ze است که Z عدد اتمی یون مربوطه است. انرژی بستگی E_n و شعاع مدارهای مانای r_n را برای این سامانه‌ها بدست آورید. □

۶.۲ آزمایش فرانک-هرتز

اصل موضوع اول بوهر یا همان فرضیه کوانتش ترازهای انرژی اتم بر مبنای نشانه‌های غیرمستقیم گسسته بودن خطوط طیف‌های اتمی بود. دقت کنید که خطوط طیفی و حتی فرمول (۳۵.۲) ری‌دبرگ بر گسسته بودن بسامدهای گسلی تاکید دارند و مستقیماً اشاره ای به کوانتش انرژی نمیکنند. اما در سال ۱۹۱۴، یک سال بعد از ارائه ی نظریه اتمی بوهر، جیمز فرانک^{۶۲} و گوستاو هرتز^{۶۳} آزمایشی را انجام دادند که نشانه‌های سراسر تری از کوانتش ترازهای انرژی اتمها را بدست داد. در این آزمایش^{۶۴} مطابق شکل (۲۱.۲) الکترونها از کاتد داغ C گسیل میشوند. بین کاتد C و شبکه ی G اختلاف پتانسیلی وجود دارد که به الکترونها شتاب میدهد و قابل تنظیم است. بعد از شبکه ی G آند A وجود دارد. این مجموعه درون محفظه ای که دارای بخار کم فشار جیوه است قرار دارد. الکترونهایی که از شبکه ی G عبور میکنند در معرض اختلاف پتانسیل کند کننده ی حدود ۰/۵ ولت مابین G و A قرار میگیرند و آنهایی که بتوانند بر این اختلاف پتانسیل کند کننده غلبه کنند به آند A رسیده و در مدار جریان میابند.

با افزایش پتانسیل بین C و G انرژی جنبشی الکترونها و در نتیجه جریان مدار افزایش میابد. اما مطابق شکل (۲۱.۲) در اختلاف پتانسیل حدود ۴/۹ ولت (یا به عبارتی الکترونیایی با انرژی ۴/۹ الکترون-ولت) جریان ناگهان بشدت افت میکند. این اتفاق در مضارب ۴/۹ مانند ۹/۸، ۱۴/۷ و ... هم تکرار میشود. تنها توجیه قابل قبول کوانتیده بودن ترازهای انرژی اتمهای جیوه است. اتمهای جیوه در فشار کم، بدون برهمکنش و در کمترین انرژی (حالت پایه) هستند. الکترونهای عبوری از شبکه ی G به این اتمها برخورد میکنند. ولی تا زمانی که انرژی آنها به اندازه ی انرژی برانگیختن اتم جیوه نباشد در هنگام برخورد هیچ تبادل انرژی رخ نداده و به عبارتی برخورد کشسان است. اما همینکه انرژی آنها به اندازه ی ۴/۹ الکترون-ولت شد، این انرژی را به اتم میدهند و برخورد ناکشسان است. پس از این، الکترونها انرژی کافی برای رسیدن به آند A را نداشته و جریان بصورت ناگهانی کاهش میابد. اگر الکترونها انرژی بیش از ۴/۹ الکترون-ولت داشته باشند، پس از برخورد ناکشسان با اتم جیوه و از دست دادن ۴/۹ الکترون-ولت انرژی، با مابقی انرژی به آند رسیده و جریان مجدداً از صفر افزایش میابد. به همین ترتیب اگر الکترون عبوری از G انرژی برابر ۹/۸ الکترون-ولت داشته باشد با دو برخورد ناکشسان به دو اتم جیوه انرژی خود را از دست میدهد که شاهد کاهش ناگهانی جریان در اختلاف پتانسیل ۹/۸ ولت هستیم. به عبارتی ترازهای اتم جیوه فقط انرژی ۴/۹ الکترون-ولت را دریافت میکند، نه بیشتر و نه کمتر که بیانگر کوانتیده بودن ترازهای انرژی اتمهای جیوه است. اتمهای جیوه ای که این انرژی را دریافت کرده و به حالت برانگیخته رفته اند، با تابش فوتونی با همین انرژی به حالت پایه باز میگردند. در واقع در طیف گسلی و جذبی جیوه یک خط پرنگ با انرژی ۴/۸۵ الکترون-ولت وجود دارد که برابر با طول موج 2573 \AA میباشد. این خط طیفی توسط فرانک و هرتز در اتمهای جیوه مشاهده شد. بعداً هرتز^{۶۵} نشان داد که برای ولتاژهای کمتر از ۴/۹ ولت هیچ خط طیفی

fine structure constant^{۶۰}

positronium^{۶۱}

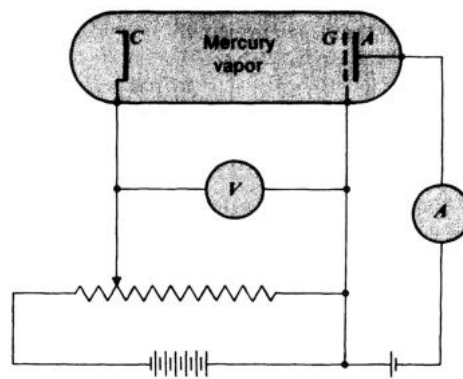
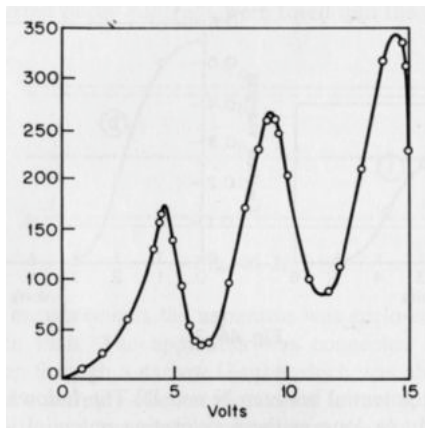
James Franck^{۶۲}

Gustav Hertz^{۶۳}، با هاینریش هرتز کاشف امواج الکترومغناطیسی اشتباه نشود. گوستاو برادرزاده ی هاینریش است.

James Franck and Gustav Hertz, *Collisions between Electrons and Mercury Vapour Molecules and the Ion-*^{۶۴}

ization Potential of Such Molecules, Verh. Dtsch. Phys. Ges. **16**, 512 (1914).

G. Hertz, Z. Phys. **22**, 18 (1924)^{۶۵}



(ب) الکترونها عبوری از G به اتمهای جیوه برخورد میکنند و اگر انرژی آنها به اندازه برانگیختن اتم جیوه یعنی $4/9$ الکترون-ولت باشد، این انرژی را به اتم داده و جریان مدار ناگهان کاهش میابد. این افت ناگهانی جریان را برای الکترونها که انرژی به اندازه ی دو یا سه یه ... برابر انرژی برانگیختگی جیوه دارند هم مشاهده میشود.

(آ) مدار آزمایش فرانک-هرتز: الکترونها از کاتد داغ C گسیل میشوند. ولتاژ بین کاتد C و شبکه ی G به این الکترونها شتاب میدهد. الکترونها پس از عبور از شبکه ی G در معرض ولتاژ بازدارنده ی بین G و آند A قرار میگیرند. الکترونها که بتوانند به آند A برسند در مدار جریان میابند.

شکل ۲۱.۲: آزمایش فرانک-هرتز

دیگری زیر 2573 \AA وجود ندارد. همچنین برای ولتاژهای بیش از $4/9$ ولت خطوط طیفی دیگری در اتم جیوه مشاهده شد که بیانگر وجود ترازهای انرژی بالاتری میباشد.

آزمایش فرانک-هرتز و نتیجه ی آن، آخرین شبهه ها را درباره ی کوانتیده بودن ترازهای انرژی اتمی زدود و نظریه کوانتوم یک قدم دیگر به پیش رفت. ظاهراً فرانک و هرتز در هنگام انجام این آزمایش از فرضیه ی اتمی بوهر و فرضیه ی کوانتیده بودن ترازهای انرژی اتمی بیخبر بوده اند. فرانک و هرتز در سال ۱۹۲۵ جایزه نوبل دریافت کردند. هرتز به همراه برخی دیگر از فیزیکدانان آلمانی مانند مانفرد فون آردن^{۶۶}، پیتر ثیسن^{۶۷} و ماکس ولمر^{۶۸} در سالهای ۱۹۴۵ تا ۱۹۵۵ به شوروی سابق رفته و در برنامه ساخت سلاح اتمی آنها مشارکت کرد. بدین خاطر به او جایزه ی استالین داده شد.

۷.۲ طول موج دوپرووی و خاصیت موجی ماده

نور از زمان ماکسول به عنوان یک پدیده ی موجی شناخته شده بود و بخوبی با معادلات ماکسول توصیف میشد. اما بعد از اثر فوتوالکتریک اینشتین و اثر کامپتون معلوم شد که نور علاوه بر خاصیت موجی میتواند خاصیت ذره ای هم داشته باشد که به آن ذره فوتون گفته شد. این واقعیت که نور دارای برخی ویژگی های ذرات است لوئی دوپرووی^{۶۹} را در سال ۱۹۲۴ بر آن داشت تا در رساله ی دکتری خود نظریه ای را بر این اساس که فوتون ها واقعا ذره هستند بنا کند. دوپرووی در مقاله اش^{۷۰} با ترکیب رابطه کوانتومی انرژی فوتون، $E = h\nu$ ، با نسخه ی نسبیتی آن، $E = pc$ ، یعنی

$$pc = h\nu, \quad (۶۱.۲)$$

به رابطه ی زیر بین تکانه ی خطی و طول موج فوتون رسید:

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (۶۲.۲)$$

^{۶۶} Manfred von Ardenne

^{۶۷} Peter Adolf Thiessen

^{۶۸} Max Volmer

^{۶۹} Louis de Broglie

^{۷۰} L. de Broglie, *A Tentative Theory of Light Quanta*, Phil. Mag. **47**, 446 (1924).

به عبارتی ذره ی فوتون با تکانه ی p دارای طول موج λ است. با ضرب و تقسیم سمت راست معادله ی بالا در 2π میتوانیم این رابطه را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$p = \hbar k, \quad (۶۳.۲)$$

که در آن

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (۶۴.۲)$$

عدد موج است. در واقع این معادله خاصیت موجی و ذره ای فوتون را به هم مرتبط میکند. البته مسیر استدلالی دوپرووی کمی غیرمستقیم و با چیزی که ما در اینجا بیان کردیم متفاوت است. او فرض کرد که فوتون دارای جرم سکون بسیار کوچک m_0 است و سپس با تبدیل لورنتس در چارچوب سکون فوتون محاسبات را انجام داد. گرچه ما امروز میدانیم که جرم سکون فوتون صفر است و هنوز آزمایشی که بتواند کران بالایی برای جرم سکون فوتون قرار دهد انجام نشده است.

بر اساس نتایج این تحلیل، دوپرووی این گمانه زنی را مطرح کرد که رابطه ی (۶۲.۲) برای تمام ذرات برقرار است! و به عبارتی خاصیت موجی، ویژگی تمام ذرات متحرک است. او در مقاله اش چنین نوشت:

بنابراین ما به این فرضیه متمایل میشویم که هر جسم متحرکی یک موج به همراه دارد و غیرممکن است که حرکت جسم و انتشار موج را از هم جدا کنیم.

البته این فرضیه هیچ پشتوانه ی آزمایشگاهی نداشت و بوضوح در مقابل فرضیه ی دیرپای ذره ای بودن ماده قرار میگرفت. این فرضیه از این دیدگاه نشأت میگرفت که همانگونه که تابش که همواره پدیده ای موجی فرض میشد میتواند از خود خاصیت ذره ای هم نشان بدهد، ماده هم که همواره دارای خاصیت ذره ای بوده است ممکن است در شرایطی از خود رفتار موجی بروز دهد. به عبارتی همانگونه که تابش خاصیت دوگانه ی موجی و ذره ای دارد، ماده هم همین خاصیت دوگانه ی موجی ذره ای را میتواند دارا باشد. اینکه تا پیش از این خاصیت موجی ماده دیده نشده بود بدین علت بود که این خاصیت مگر در شرایطی که قبلا مورد آزمایش قرار نگرفته بود آشکار نمیشد.

گفته میشود که از دوپرووی در هنگام دفاع از رساله ی دکتری اش پرسیده شد چه چیزی این خاصیت موجی ماده (به صورت خاص الکترون) را میتواند اثبات کند؟ و دوپرووی در جواب گفته است یک آزمایش پراکندگی الکترون از بلورها میتواند این فرضیه را اثبات کند. جالب آنکه از اینشتین درباره ی رساله ی دکتری دوپرووی مشورت شد و او پیشنهاد کرد با وجود اینکه فرضیه ی او بلحاظ آزمایشگاهی واریسی نشده و مورد شک و شبهه است، به او درجه ی دکترا داده شود. البته یک سال بعد این فرضیه دوپرووی توسط داویسون و گرمر در آزمایشگاه تایید شد و چند سال بعد در سال ۱۹۲۹ دوپرووی جایزه نوبل را «برای کشف طبیعت موجی الکترون» دریافت کرد.

مثال ۱.۲. طول موج دوپرووی الکترونی با انرژی جنبشی ۵۴ الکترون-ولت را محاسبه کنید.

حل: از آنجا که نسبت انرژی جنبشی الکترون به انرژی سکون آن بسیار کم است:

$$\begin{aligned} \frac{K}{m_e c^2} &= \frac{54 \text{ eV}}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 / (1.6 \times 10^{-19} \text{ eV/J})} \\ &= \frac{54 \text{ eV}}{0.511 \text{ MeV}} = 0.000105675 \ll 1, \end{aligned}$$

در محدوده ی نانسیتی هستیم و داریم:

$$K = \frac{p^2}{2m_e}.$$

بنابراین طول موج دوپرووی الکترون برابر است با

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{\sqrt{2(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(54 \text{ eV } 1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}} \\ &= 1.67 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.67 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

نکته قابل توجه این است که ابعاد یک اتم نوعی از مرتبه ۱ آنگستروم است که با طول موج دوپرووی این الکترون قابل مقایسه است. □

تمرین ۱۳.۲. طول موج دوبروی را برای ذرات زیر محاسبه کرده و جوابها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای میگیرید؟

(الف) الکترونی که با نصف سرعت نور حرکت میکند.

(ب) الکترونی که با سرعت ۱۰۰ متر بر ثانیه حرکت میکند.

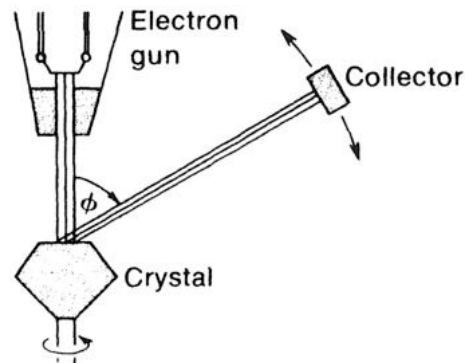
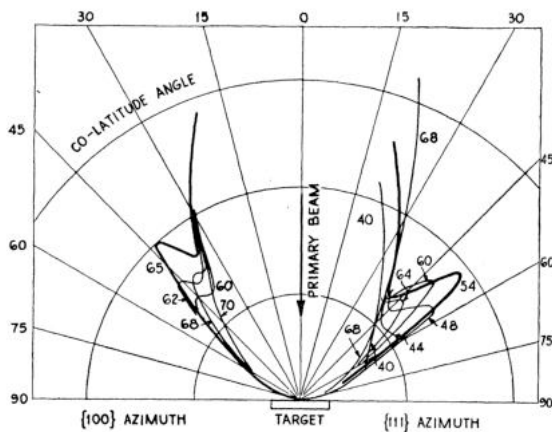
(پ) یک گلوله ی ۱۵ گرمی که با سرعت ۱۰۰۰ متر بر ثانیه شلیک شده است.

(ت) خودتان وقتی با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه میدوید.

طول موج دوبروی هر کدام از موارد بالا را با طول موج کامپتون آن مقایسه کنید. □

۸.۲ آزمایش داویسون-گرمر

در سال ۱۹۲۵، کلینتون داویسون^{۷۱} و لستر گرمر^{۷۲} در آزمایشگاههای تلفن بل پراکندگی الکترونها را از پلی کریستال نیکل مورد مطالعه قرار داده بودند. در یک اتفاق خوشایند! محفظه ی خلاء شکست و نیکل درون آن اکسید شد. آنها برای حذف اکسید از نیکل آن را حرارت دادند. پس از آن نیکل به شکل بلورهای بزرگی در آمد. پدیده ی جالبی که مشاهده شد این بود که در این حالت الگوی پراکندگی الکترونها بشدت تغییر کرد و شدت پراکندگی الکترونها در زوایای خاصی بسیار زیاد بود. پس از این آنها بصورت خاص تک بلورهای نیکل را در معرض بمباران الکترونها قرار دادند تا به شکل هدفمند فرضیه امواج الکترونی دوبروی را تحقیق کنند^{۷۳}. آنها بصورت خاص پراکندگی الکترونها با انرژی ۵۴ الکترون-ولت را از بلور نیکل مورد بررسی قرار دادند و در زاویه ی $\phi = 50^\circ$ یک بازتاب شدید مشاهده کردند. شکل (۲۲.۲(ب)) برپایش آزمایش داویسون-گرمر را نشان میدهد. داده



(ب) نمودارهای پراکندگی پرتوهای الکترونی ۵۴ و ۶۵ ولتی از مقاله ی داویسون و گرمر (پانویس ۷۳): ولتاژ هر پرتو در کنار آن نوشته شده است. مسیر پرتو الکترونی فرودی از بالا به پایین و در زاویه ی $\phi = 0$ است. در پایین شکل هدف بلور نیکل قرار دارد. برای پرتوهای الکترونی ۵۴ ولتی بیشینه ی نمودار در زاویه ۵۰ درجه اتفاق می افتد.

(آ) برپایش آزمایش داویسون-گرمر: الکترونها از بالا به بلور نیکل برخورد کرده و پراکنده میشوند. بلور روی محوری دوار قرار دارد که آنرا در زوایای سمتی مختلف میچرخاند. آشکارساز در زوایای مختلف ϕ میتواند شدت الکترونها بازتابی را اندازه بگیرد.

شکل ۲۲.۲: آزمایش داویسون-گرمر

های حاصل از آزمایش داویسون و گرمر در شکل (۲۲.۲(ب)) به ازای دو ولتاژ ۶۵ و ۵۴ ولت نشان داده شده اند. واضح است که در ولتاژ ۵۴ ولت شدت الکترونها بازتابی در زاویه ی ۵۰ درجه بیشینه است. این داده ها فقط در صورتی که الکترونها را بصورت امواجی شبیه پرتو ایکس در نظر بگیریم قابل توجیه است. در ادامه بجای آنکه وارد جزئیات محاسباتی شویم الگوی پراکندگی پرتو ایکس و پرتوی نوترون را از بلور کلرید سدیم (نمک طعام) بررسی میکنیم. شکل (۲۳.۲(آ)) پراکندگی پرتو ایکس از بلور نمک طعام را که توسط ویلیام هنری براگ در سال ۱۹۱۳ انجام شده است نشان میدهد^{۷۴}. الگوی مشاهده شده در پراکندگی امواج از ساختار بلورها عمومیت دارد و بیانگر خاصیت موجی پرتو فرودی است. شکل (۲۳.۲(ب)) هم پراکندگی نوترون را از بلور

^{۷۱} Clinton Davisson

^{۷۲} Lester Germer

^{۷۳} C. Davisson and L. H. Germer, *Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel*, Phys. Rev. **30**, 705 (1927)

^{۷۴} William H. Bragg, *The reflection of X-rays by crystals*, Proc. Royal Soc. **89**, 248 (1913).

نمک طعام نشان میدهد که توسط شال و همکاران در سال ۱۹۴۸ انجام شده است نشان میدهد^{۷۵}. شباهت چشمگیر این الگو با الگوی پراکندگی امواج پرتو ایکس آشکارا نشان دهنده ی رفتار موج گونه ی نوترون ها است که دلیلی روشن بر وجود خاصیت موجی ذرات مادی است. براگ (به همراه پسرش) در سال ۱۹۱۵ و شال در سال ۱۹۹۴ جایزه نوبل را دریافت کردند.



(ب) پراکندگی نوترون از بلور نمک طعام توسط شال و همکاران در سال ۱۹۴۸ (پانویس ۷۵). شباهت خیره کننده این الگو با الگوی پراکندگی امواج پرتو ایکس از نمک طعام بیانگر خاصیت موجی نوترون (و در حالت کلی هر ذره ای) است.

(آ) پراکندگی پرتو ایکس از بلور نمک طعام توسط براگ در سال ۱۹۱۳ (پانویس ۷۴). این الگو ویژگی عمومی پراکندگی امواج از ساختار بلورها است.

شکل ۲۳.۲: الگوی پراکندگی پرتو ایکس و نوترون از نمک طعام

پس از آزمایش داویسون و گرمر و همچنین آزمایش مشابهی که در سال ۱۹۲۸ توسط جورج تامسون^{۷۶} انجام شد، فرضیه دوبروی درباره ی خاصیت موجی الکترون و بطور کلی ذرات مادی به اثبات رسید. به دوبروی در سال جایزه ی نوبل اعطا شد. همچنین داویسون به همراه جورج تامسون جایزه ی نوبل را در سال دریافت کردند. جورج تامسون فرزند جی جی تامسون کاشف الکترون بود که بخاطر کشف این ذره ی مهم جایزه نوبل را در سال ۱۹۰۶ دریافت کرد. جالب اینکه پدر و پسر هر دو بخاطر الکترون نوبل گرفتند، پدر بخاطر کشف خاصیت ذره ای آن و پسر بخاطر کشف خاصیت موجی آن!

۹.۲ معادله‌ی شرودینگر

هر موج باید توسط یک معادله دیفرانسیل که شامل مشتقات زمانی و مکانی موج مورد نظر است و به آن معادله ی موج میگویند توصیف شود. مثلا امواج الکترومغناطیس توسط معادلات ماکسول توصیف میشوند. پس انتظار این است که امواج دوبروی که بیانگر خاصیت موجی ذرات مادی هستند نیز در یک معادله موج صدق کند. کما اینکه در سال ۱۹۲۶ بعد از سخنرانی که اروین شرودینگر^{۷۷} درباره نظریه امواج مادی دوبروی داشت، پیتر دبای خاطر نشان کرد که این امواج مانند هر موج دیگری نیاز به یک معادله ی موج دارد که تحول آنرا توصیف کند. شرودینگر این نکته را جدی گرفته و چند هفته بعد در نشست بعدی گفت:

همکارم پیتر دبای متذکر شده بود که این امواج باید یک معادله موج داشته باشند؛ خب، من یکی یافته

ام^{۷۸}

E. O. Wollan, C. G. Shull, M. C. Marney, *Laue Photography of Neutron Diffraction*, Phys. Rev. **73**, 527^{۷۵} (1948).

George Paget Thomson^{۷۶}

Ervin Schrodinger^{۷۷}

Physics Today, **28**, (12), 23 (1976)^{۷۸}

شرودینگر از تطابق ایده اش با نظریه هامیلتون-ژاکوبی در مکانیک کلاسیک معادله اش را بدست آورد. اما ما اینجا از ایده‌ی دوبروی استفاده میکنیم. برای سادگی مسیله را در یک بعد بررسی خواهیم کرد. خواهیم دید که تعمیم به سه بعد سراسر است. اگر موج منتسب به ذره در یک بعد را با $\psi(x, t)$ نشان دهیم وابستگی مکان زمانی آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\psi(x, t) = Ce^{i(kx - \omega t)}, \quad (۶۵.۲)$$

که k عدد موج و $\omega = 2\pi\nu$ است. علت این انتخاب برای ψ این است که هر موج دلخواه را میتوان بصورت بسط فوریه‌ی توابع مثلثاتی مختلط نوشت. از آنجا که ψ باید در معادله‌ی موج صدق کند، این معادله باید مشتقات زمانی و مکانی ψ را به هم مرتبط کند. پس از مشتق گیری از ψ نسبت به زمان شروع میکنیم و داریم:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -i\omega \psi(x, t). \quad (۶۶.۲)$$

با ضرب دو طرف معادله بالا در $i\hbar$ و جایگذاری $E = \hbar\omega$ داریم:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = E\psi(x, t). \quad (۶۷.۲)$$

همچنین با مشتق گیری از ψ نسبت به مکان به معادله‌ی زیر میرسیم:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = ik\psi(x, t), \quad (۶۸.۲)$$

که با ضرب دو طرف در $-i\hbar$ و استفاده از $p = \hbar k$ داریم:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = p\psi(x, t). \quad (۶۹.۲)$$

رابطه‌ی نانسبیتی بین انرژی E و تکانه‌ی p از قرار زیر است:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, t). \quad (۷۰.۲)$$

بنابراین برای بدست آوردن $p^2/2m$ از رابطه‌ی (۶۹.۲) یک بار دیگر مشتق میگیریم که نهایتاً به رابطه‌ی زیر میرسیم:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = p^2 \psi(x, t). \quad (۷۱.۲)$$

حال با جایگذاری (۷۰.۲) در رابطه‌ی (۶۷.۲) داریم:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = E\psi(x, t) = \left(\frac{p^2}{2m} + V(x, t) \right) \psi(x, t), \quad (۷۲.۲)$$

که با استفاده از (۷۱.۲) خواهیم داشت:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\psi(x, t). \quad (۷۳.۲)$$

این معادله‌ی موج حاکم بر ψ است که به معادله‌ی شرودینگر معروف است. این معادله در سه بعد به شکل زیر خواهد بود:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (۷۴.۲)$$

باید توجه داشت که ما معادله‌ی شرودینگر را اثبات نکرده ایم، بلکه آن را برای یک جواب خاص بدست آورده ایم. اصولاً معادله‌ی شرودینگر را نمیتوان اثبات کرد همانگونه که قانون دوم نیوتن قابل اثبات نیست. همانگونه که حل معادله‌ی موج برای سیم ویولن بسامدهای معینی را بدست میدهد، حل معادله‌ی شرودینگر برای سامانه‌های کوانتومی هم ترازهای انرژی معینی را بدست میدهد.

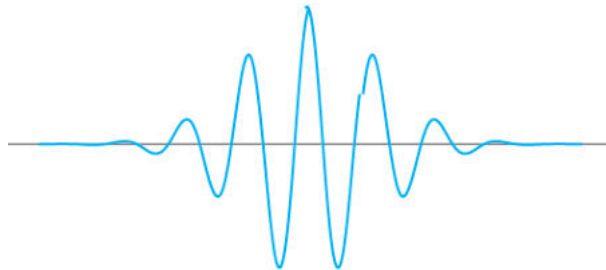
۱۰.۲ تعبیر احتمالاتی معادله‌ی شرودینگر

معادله‌ی شرودینگر بخوبی تحول تابع موج سامانه را توصیف میکند. اما سوال بسیار مهمی که باید پاسخ داده شود این است تابع موج ψ چه ارتباطی با ذره دارد و به چه ویژگی از ذره مربوط میشود؟ مثلاً در معادله‌ی موج حاکم بر یک ریسمان مرتعش، این موج بیانگر نوسان ریسمان است به قسمی که دامنه و بسامد موج بیانگر دامنه و بسامد ارتعاش آن است. یا معادلات ماکسول توصیف کننده‌ی امواج الکترومغناطیسی هستند که همان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی منتشر شونده در فضا هستند. در ابتدا شرودینگر و دیگران تصور میکردند که تابع موج ψ بیانگر گسترش فضایی ذره است. بدین معنا که ذره در فضا گسترده شده است و بیشتر ذره در جایی است که تابع موج مقدارش بیشتر است. اما این تعبیر به سرعت توسط ماکس بورن^{۷۹} رد شد. برای این منظور ماکس بورن پراکندگی یک بسته موج را بررسی کرد.

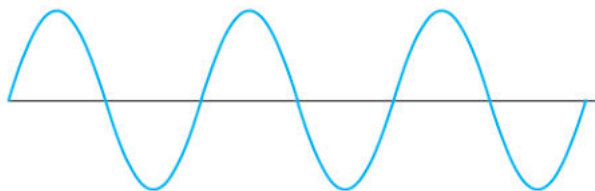
بسته موج برهم نهی از امواج است به قسمی که در یک محدوده از فضا جایگزیده باشد. به عنوان مثال موج $\sin(kx - \omega t)$ در کل فضا گسترده است و بسته موج نیست برخلاف $\exp[-\alpha(x - vt)^2]$ که در قسمت محدودی از فضا جایگزیده است. شکل (۲۴.۲) یک موج گسترده را در مقابل یک بسته موج نشان میدهد. یک بسته موج را میتوان بصورت برهم نهی از مجموعه‌ای از امواج تخت به شکل زیر نوشت:

$$\psi(x, t) = \int dk g(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}, \quad (۷۵.۲)$$

که $g(k)$ دامنه‌ی موج تخت با عدد موج k و بسامد زاویه‌ای $\omega(k)$ است.



(آ) یک بسته موج که در یک محدوده از فضا جایگزیده است.



(ب) یک موج سینوسی که در کل فضا گسترده است.

شکل ۲۴.۲: بسته موج در مقابل موج گسترده

بورن متوجه شد که وقتی ذره‌ای مانند الکترون به هدف (مثلاً اتم یا هسته اتم) برخورد میکند، تابع موج آن در تمام جهات به بیرون تابیده میشود و بزرگی آن به شکل $1/r$ کاهش میابد که r فاصله از هدف است. این، با تجربه‌ی آزمایشگاهی ما همخوانی ندارد که ذره اگرچه به هر حال در یک جهتی پراکنده میشود، اما هیچگاه تکه تکه نشده و در تمام جهات پراکنده نمیشود. بورن پیشنهاد کرد که بزرگی تابع موج $\psi(\mathbf{r}, t)$ به ما نمیگوید چه مقدار از ذره در زمان t در محل \mathbf{r} است بلکه درباره احتمال اینکه ذره در زمان t در محل \mathbf{r} باشد صحبت میکند. به عبارت دقیقتر برای سامانه‌ی تک ذره‌ای یک بعدی احتمال یافتن ذره در بازه x تا $x + dx$ در زمان t برابر است با

$$dPr(x) = |\psi(x, t)|^2 dx, \quad (۷۶.۲)$$

که در آن

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (۷۷.۲)$$

Max Born^{۷۹}

چگالی احتمال و بنابراین تابع موج $\psi(x, t)$ **دامنه‌ی احتمال**^{۸۰} است. به عبارت دقیق تابع موج $\psi(x, t)$ تابعی مختلط و بیانگر دامنه‌ی احتمال یافتن ذره در زمان t در محل x است. این مربع بزرگی تابع موج است که تابعی حقیقی و مثبت و بیانگر چگالی احتمال یافتن ذره است. چون به هر حال ذره در یک نقطه از فضا وجود دارد پس مجموع همه‌ی احتمال‌ها باید برابر یک باشد یعنی:

$$\int d\text{Pr}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = 1. \quad (۷۸.۲)$$

به این رابطه شرط **بهنجارش**^{۸۱} گویند. به عبارتی تابع موج باید بهنجار به یک باشد. بدین منظور لازم است که انتگرال (۷۸.۲) واگرا نشود یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 < \infty. \quad (۷۹.۲)$$

به عبارتی میگوییم تابع موج باید **انتگرال پذیر مجذوری**^{۸۲} باشد. این شرط یک محدودیت قوی روی مربع تابع موج میگذارد که باید در بینهایت با سرعت کافی به سمت صفر میل کند. تعمیم به سه بعد بسیار سراسر است. احتمال یافتن ذره در حجم $d^3r = dxdydz$ در اطراف نقطه‌ی \mathbf{r} برابر است با

$$d\text{Pr}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r. \quad (۸۰.۲)$$

همچنین شرط بهنجارش در سه بعد از قرار زیر است:

$$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1, \quad (۸۱.۲)$$

که انتگرال روی کل فضا گرفته میشود.

تمرین ۱۴.۲. جنس کمیت تابع موج در یک بعد و سه بعد چیست؟ (راهنمایی: به روابط شرط بهنجارش (۷۸.۲) و (۸۱.۲) توجه کنید.)

۱.۱۰.۲ بقای احتمال

چون ذره خودبخود از بین نمی‌رود، با گذشت زمان همچنان در یک جایی از فضا قرار دارد و بنابراین احتمال یافتن آن در یک جایی از فضا یک است. به عبارتی

$$\frac{d}{dt} \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{d}{dt}(1) = 0. \quad (۸۲.۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 &= \frac{d}{dt} \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \int d^3r \left(\frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) + \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (۸۳.۲)$$

معادله‌ی شرودینگر برای $\psi(\mathbf{r}, t)$ و $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ از قرار زیر است:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (۸۴.۲)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^*(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t). \quad (۸۵.۲)$$

probability amplitude^{۸۰}
normalization condition^{۸۱}
square integrable^{۸۲}

با ضرب دو معادله ی بالا به ترتیب در $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ و $\psi(\mathbf{r}, t)$ داریم:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (۸۶.۲)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 \psi^*(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (۸۷.۲)$$

حال با کم کردن دو معادله ی بالا از هم داریم:

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 \psi^*(\mathbf{r}, t) \right). \quad (۸۸.۲)$$

با توجه به تعریف چگالی احتمال

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (۸۹.۲)$$

میتوانیم معادله ی (۸۸.۲) را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot \left(\psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) \right). \quad (۹۰.۲)$$

با تعریف بردار چگالی جریان احتمال $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ به صورت

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \right), \quad (۹۱.۲)$$

معادله ی (۹۰.۲) به صورت زیر نوشته میشود:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (۹۲.۲)$$

که به آن **معادله ی پیوستگی**^{۸۳} گویند که شبیه معادله ی پیوستگی در الکترومغناطیس که بیانگر قانون بقای بار است میباشد. معادله ی (۹۲.۲) بیان ریاضیاتی قانون بقای احتمال است و بدین معنی است که اگر در نقطه ای از فضا چگالی احتمال یافتن ذره کاهش (افزایش) یابد، این تغییر احتمال توسط چگالی جریان احتمال شارش یافته و در محل دیگری با افزایش (کاهش) چگالی احتمال روبرو خواهیم بود به قسمی که همچنان احتمال یافتن ذره در تمام فضا برابر یک باشد.

۱۱.۲ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

در بخشهای پیشین دیدیم که کاربرد مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس برای پدیده های اتمی منجر به تناقض بین پیشگویی و نتایج آزمایش میشود. این تناقضها مردم را به این نتیجه رساند که برای برساختن یک نظریه که برای پدیده های اتمی قابل کاربرد باشد لازم است که یک پیرایش و اصلاح در قوانین و مفاهیم فیزیکی انجام پذیرد. به عنوان مثال رفتار موج گونه ی الکترون هنگام عبور از یک بلور یا رفتار ذره ای فوتون نسبتا پرانرژی هنگام برخورد با سطح یک فلز قلیایی. چنین نتایجی با این ایده که الکترون در یک مسیر مشخص حرکت میکند و به عبارتی با مفهوم معمول کلاسیکی حرکت در تناقض است. بنابراین مکانیک کوانتومی باید بر اساس ایده ای از حرکت باشد که بصورت اساسی از مفهوم متناظرش در مکانیک کلاسیک متفاوت است. پس در مکانیک کوانتومی چیزی به نام مسیر حرکت ذره وجود ندارد و این اساس اصل عدم قطعیت^{۸۴} است که در سال ۱۹۲۷ توسط ورنر هایزنبرگ^{۸۵} کشف شد. اصل عدم قطعیت یک **اصل سلبی** است. برای اینکه نظریه ای شکل بگیرد نیازمند یک اصل ایجابی هم هست. در مکانیک کوانتومی این اصل ایجابی اصل برهنه^{۸۶} است که در فصل بعد درباره آن صحبت خواهد شد.

اساسا یک نظریه جامعتر بصورت منطقی مستقل از نظریه ی کمتر جامع (که حالت حدی نظریه جامع است) بر ساخته میشود. مانند نسبیت که اصول آن از مکانیک نیوتونی مستقل است. اما چنین رابطه ای بین مکانیک کوانتومی (به عنوان نظریه جامع)

continuity equation^{۸۳}
uncertainty principle^{۸۴}
Werner Heisenberg^{۸۵}
superposition principle^{۸۶}

و مکانیک کلاسیک (به عنوان حالت حدی آن) وجود ندارد. اساسا بر ساختن مفاهیم اصلی مکانیک کوانتومی مستقل و بدون استفاده از مکانیک کلاسیک امکان پذیر نیست. این واقعیت که الکترون^{۸۷} (بخاطر خاصیت موجی) هیچ مسیر مشخصی ندارد بدین معناست که در درون خودش هیچ خصوصیت دینامیکی ندارد. بنابراین واضح است که برای سامانه ای که فقط از اجزای کوانتومی تشکیل شده است کاملا غیر ممکن است که مکانیک منطقا مستقل بسازیم چراکه وقتی مختصه ی دینامیکی ندارد نمیتوان برایش مکانیکی تعریف کرد.

برای اینکه توصیف کمی حرکت الکترون امکان پذیر باشد نیازمند یک جسم فیزیکی هستیم که تا حد دقت کافی از مکانیک کلاسیک تبعیت کند؛ یعنی یک شیء کلاسیکی که واجد مختصه های دینامیکی باشد. بنابراین زمانی که الکترون با این شیء فیزیکی برهمکنش میکند، حالت این شیء کلاسیکی بصورت کلی تغییر میکند. نوع و میزان این تغییر به حالت الکترون بستگی دارد و بنابراین از روی میزان این تغییر (که در واقع تغییر در مختصه های دینامیکی شیء کلاسیکی است) میتوان حالت الکترون را مشخص کرد. به جسم فیزیک **دستگاه** و به برهمکنش با الکترون **اندازه گیری** میگوییم. در اینجا منظور از اندازه گیری فرآیندی است که در آن مشاهده گر دخالت دارد نیست. در کوانتوم اندازه گیری هر فرآیند برهمکنش بین جسم کلاسیکی و کوانتومی است که مستقل از ناظر به وقوع میپیوندد. منظور از دستگاه هر جسم فیزیک است که با دقت کافی تحت قوانین مکانیک کلاسیک است و بنابراین دارای متغیرهای دینامیکی برای توصیف هر سامانه ای است. البته دستگاه لزوما درشت مقیاس نیست و ممکن است قسمتی از آن ریزمقیاس باشد. چراکه شرط «با دقت کافی» در شرایط مختلف متفاوت است. بنابراین مکانیک کوانتومی جایگاهی بسیار غیر عادی در بین نظریات فیزیک دارد: مکانیک کلاسیک را به عنوان حالت حدی در خود دارد و همزمان به این حالت حدی برای فرمول بندی نیازمند است!

یک مسئله ی نوعی در مکانیک کوانتومی شامل پیشگویی نتیجه ی اندازه گیری قبل از انجام آن و بر اساس نتایج اندازه گیری های قبلی است. ویژگی مهم اندازه گیری در مکانیک کوانتومی این است که اندازه گیری همواره بر روی سامانه ی کوانتومی مانند الکترون اثر میگذارد. اساسا غیرممکن است که برای یک دقت معلوم این تاثیر را به اندازه ی دلخواه کم کرد. در واقع هرچه اندازه گیری دقیق تر باشد اثر قوی تری بر روی الکترون میگذارد و فقط با اندازه گیری های با دقت پایین است که اثر اندازه ی گیری کوچک است. این خصوصیت اندازه گیری بصورت منطقی به این واقعیت مرتبط است که ویژگی های دینامیکی الکترون تنها به عنوان نتیجه ی خود آزمایش ظاهر میشود. واضح است که اگر اثر اندازه گیری روی جسم را بتوان تا حد دلخواه کوچک کرد، این بدان معناست که کمیت اندازه گیری شده خودش، مستقل از اندازه گیری، دارای مقدار معین است. برای این که این مسئله واضح تر شود به یک آزمایش برای اندازه گیری محل الکترون متوسل میشویم که به میکروسکوپ هایزنبرگ معروف است.

۱.۱۱.۲ میکروسکوپ هایزنبرگ

این آزمایش درباره از بین رفتن اطلاعات ما درباره ی تکانه ی خطی ذره (در اینجا الکترون) بوسیله ی اندازه گیری مکان آن توسط ابزاری است که آن را میکروسکوپ مینامیم. برای مشاهده ی الکترون باید به آن نور تابانید و از پراکندگی نور بازتابی مکان آن را اندازه گرفت. دقت اندازه گیری متناسب با طول موج نور تابیده است. به عبارتی طول موج نور تابشی مانند درجه بندی های خط کشی عمل میکند. یعنی هرچه طول موج نور تابشی کمتر باشد، دقت اندازه گیری اش بیشتر است. مطابق شکل (۲۵.۲) فرض کنیم فاصله ی ذره از میکروسکوپ به اندازه ای باشد که زاویه ی پرتوهای نور رسیده از الکترون به لبه های لنز آن برابر ϵ باشد. اگر طول موج نور تابیده شده به الکترون برابر λ باشد، عدم قطعیت در اندازه گیری مولفه ی x الکترون بر اساس قوانین اپتیک برابر است با

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \epsilon} . \quad (۹۳.۲)$$

برای هر اندازه گیری باید حداقل یک فوتون به الکترون برخورد کرده، از آن پراکنده شده، از میکروسکوپ عبور کرده و توسط ناظر مشاهده شود. تلقی کلاسیکی این است که بر اساس معادله ی بالا، برای کاهش عدم قطعیت در اندازه گیری مکان الکترون، Δx ، کفایت به اندازه ی دلخواه طول موج فوتون تابشی را کاهش دهیم. اما بین فوتون فرودی و الکترون برخورد کامپتون اتفاق افتاده و الکترون توسط فوتون پس زده میشود که میزان تکانه ی این پس زنی از مرتبه ی h/λ است. این پس زنی را نمیتوان بطور دقیق معلوم کرد چراکه جهت فوتون پراکنده شده در دسته پرتوی ورودی به میکروسکوپ نامعلوم است. بنابراین عدم قطعیت پس زنی در جهت x برابر است با

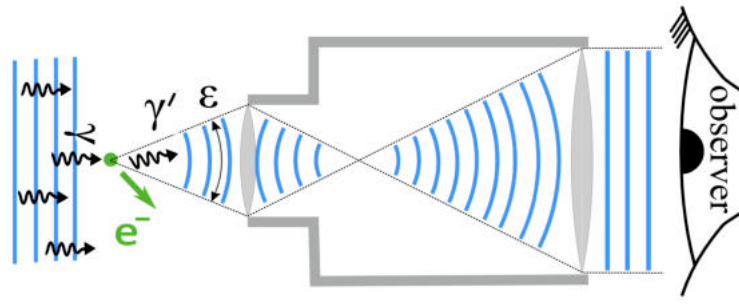
$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon , \quad (۹۴.۲)$$

^{۸۷}در اینجا الکترون را به عنوان نماینده ی هر ذره ی نوعی زیر اتمی که اثرات کوانتومی آن آشکار است بکار برده ایم.

و بنابراین برای الکترون پس از پراکندگی (یعنی الکترون اندازه گیری شده) داریم:

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar. \quad (95.2)$$

این بیان اولیه ی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است. هرگونه تلاش برای فرار از این محدودیت بنیادی با شکست مواجه شده است.



شکل ۲۵.۲: میکروسکوپ هایزنبرگ

۲.۱۱.۲ اندازه گیری مکان الکترون

حال فرض کنید در بازه ی زمانی معین Δt اندازه گیری های پشت سر همی برای مکان الکترون انجام شود. با توجه به نتیجه ی حاصل از میکروسکوپ هایزنبرگ، نتیجه کلی روی یک مسیر هموار نیست. چراکه برای هر اندازه گیری باید یک فوتون به الکترون برخورد کند که باعث پس زده شدن الکترون شده و برای هرچه دقیق تر اندازه گرفتن مکان الکترون، طول موج فوتون کمتر و در نتیجه بسامد و تکانه ی انتقالی آن به الکترون بیشتر بوده و بنابراین الکترون شدیدتر پس زده میشود. پس هرچه اندازه گیری دقیقتر باشد، به هم ریختگی و تغییرات نتایج بیشتر است. یک مسیر هموار فقط در حالت دقت پایین اندازه گیری بدست می آید. حال اگر دقت اندازه گیری را ثابت نگه داریم و تعداد اندازه گیری ها را در بازه ی زمانی Δt بیشتر کنیم، دو اندازه گیری پشت سر هم، اگرچه در یک بازه ی کوچک فضایی قرار گرفته اند، اما یک توزیع کاملاً بی قاعده خواهند داشت که به هیچ وجه روی یک خط هموار قرار نمیگیرند. به ویژه وقتی Δt به سمت صفر میل کند، نتیجه ی دو اندازه گیری پشت سر هم به هیچ وجه روی یک خط مستقیم نخواهد بود. پس نمیتوان برای مسیر ذره خط مماس یا به عبارتی مشتق تعریف کرد و بنابراین نمیتوان سرعت را شبیه آنچه در مکانیک کلاسیک تعریف کردیم داشته باشیم. یعنی حد تفاضل دو مختصه در فاصله ی زمانی Δt تقسیم بر بازه ی زمانی Δt وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ وجود ندارد. در نتیجه درحالیکه در مکانیک کلاسیک ذره دارای یک مکان و سرعت معینی در هر لحظه است، در مکانیک کوانتومی موقعیت کالماً متفاوت است: اگر به عنوان نتیجه ی اندازه گیری، الکترون دارای مکان معینی باشد دیگر سرعت معینی نخواهد داشت و برعکس. وجود همزمان مختصه و سرعت به معنای وجود مسیر مشخصی برای الکترون است که با توجه به توضیحات فوق آشکار است الکترون فاقد آن است. بنابراین در مکانیک کوانتومی، مختصه و سرعت الکترون را نمیتوان همزمان اندازه گرفت. به عبارتی آنها نمیتوانند همزمان مقادیر معینی داشته باشند و میگوییم:

مختصه و سرعت الکترون کمیتهایی هستند که به صورت همزمان وجود ندارند.

پس باید به دنبال رابطه ای باشیم که امکان اندازه گیری غیردقیق مختصه و سرعت الکترون را به صورت همزمان بدهد. از آنجا که هرچه دقت در اندازه گیری مکان بیشتر باشد (یعنی کاهش Δx)، اطلاعات ما درباره ی سرعت کمتر میشود (افزایش Δv)، پس حاصلضرب این دو باید همواره از یک مقدار ثابت بیشتر باشد. این مقدار باید رد حد کلاسیکی به سمت صفر میل کند. پس طبیعی است که این مقدار ضربی از \hbar باشد. به عبارتی:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (96.2)$$

که بیان اصل عدم قطعیت است. مشابه این رابطه برای مولفه های y و z هم وجود دارد.

۱۲.۲ مکانیک ماتریسی